Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 3

Métodos de solução de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Prof. Diogo Lôndero da Silva

Sumário

Métodos de solução de equações de primeira ordem

1. Equações separáveis;
2. Equações lineares e método dos fatores integrantes;
3. Equações exatas e fatores integrantes;

Equações separáveis

- Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para dy/dx pode ser fatorada como uma função de *x* multiplicada por uma função de *y*. Em outras palavras, pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,f(y)$$

- O nome separável vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y.

Equações separáveis

- ✓ Da mesma forma, se f (y) $\neq$ 0, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad (1)$$

onde h(y) = 1 / f(y). Para resolver essa equação, a reescrevemos na forma diferencial multiplicando os dois lados por dx.

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado.

Equações separáveis

- ✓ Então integramos ambos os lados da equação:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \boxed{2}$$

A Equação 2 define y implicitamente como função de x. Em alguns casos também poderemos isolar para y em termos de x.

Lembre-se de manter as constantes de integração!

Equações separáveis

Usamos a Regra da Cadeia para justificar o procedimento anterior (slides 3 e 4): Se h e g satisfazem a eq. 2 , então:

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

logo

$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Regra da cadeia

e

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Portanto, a Equação 1 é satisfeita.

Equações separáveis

Uma segunda maneira de verificar a equivalência entre as formas é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \therefore \; h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Assumindo $\quad y = f(x) \therefore \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

Logo $\quad h(y)\,f'(x) = g(x) \therefore \int h(y)\,f'(x)dx = \int g(x)dx$

Que é equivalente a $\int h(y)dy = \int g(x)dx$ pois $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Equações separáveis

Exemplo 1: (a) Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$

(b) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO:

(a) Escrevemos a equação na forma diferencial e integramos os dois lados:

$$y^2\, dy = x^2\, dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

Equações separáveis

onde C é uma constante qualquer. (Poderíamos ter usado uma constante C_1 no lado esquerdo e outra constante C_2 no lado direito. Mas decidimos combiná-las em uma só constante no lado direito, fazendo $C = C_2 - C_1$.)

Resolvendo para y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Poderíamos deixar a solução dessa maneira ou podemos escrevê-la na forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

onde K = 3C. (Pois C é uma constante qualquer e o mesmo ocorre com K.)

(b) Se fizermos x = 0 na equação geral da parte (a), temos $y(0)=(K)^{1/3}$.

Para satisfazer a condição inicial y(0) = 2, devemos fazer $(K)^{1/3} = 2$

e assim K = 8. Portanto, a solução

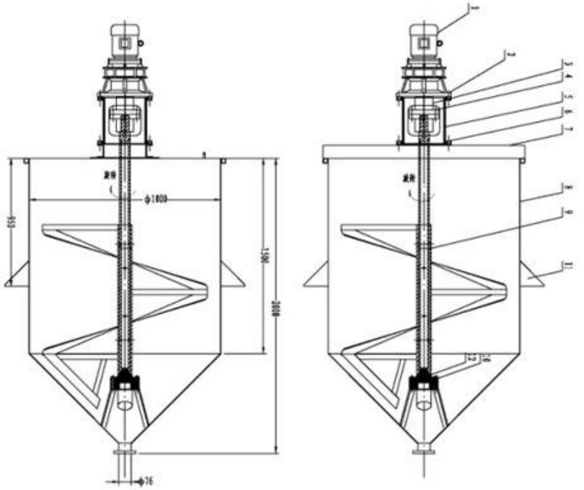
do problema de valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Exemplo 2 – Problema da mistura

A descrição matemática de uma situação física frequentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável.

Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sanguínea, entre outros.



Exemplo 2 – Problema da mistura

Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5.000 L de água. Água salgada com 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

SOLUÇÃO: Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. Foi-nos dado que $y(0) = 20$ kg e queremos encontrar $y(30)$. Fazemos isso encontrando uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$.

Equações separáveis

Exemplo 2 – Problema da mistura

Observe que dy/dt é a taxa de variação da quantidade de sal, assim,

$$\frac{dy}{dt} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída})$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

$$\text{taxa de entrada} = \left(0{,}03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

O tanque sempre contém 5.000 L de líquido, então a concentração no tempo t é y (t)/5.000 (medida em quilogramas por litro).

Método da separação de variáveis

Exemplo 2 – Problema da mistura

Como a água salgada sai a uma taxa de 25 L/min, obtemos

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{5.000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Então, da Equação 5, temos

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, obtemos

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Método da separação de variáveis

Exemplo 2 – Problema da mistura

Uma vez que y (0) = 20, temos –ln 130 = C, logo

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Portanto, | 150 – y | = $130e^{-t/200}$

Como y (t) é contínua, y (0) = 20 e o lado direito nunca é zero, deduzimos que 150 – y (t) é sempre positiva. Então, | 150 – y | = 150 – y e assim

$$y(t) = 150 - 130^{e-t/200}$$

A quantidade de sal depois de 30 minutos é

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38{,}1 \text{ kg}$$

Equações Lineares de primeira ordem

Seja a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad \boxed{1}$$

Ela será linear e de primeira ordem se a função *f* depender linearmente da variável *y*.

A forma geral/padrão de uma equação linear de primeira ordem é expressa por:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \qquad \boxed{2}$$

Onde *p* e *g* são funções dadas da variável independente *t*.

Equações Lineares

Caso I : Coeficientes constantes: Separação de variáveis

Se p(t) e g(t) forem constantes e iguais a *a* e *b*, respectivamente, a equação 2 assume a forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

E pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis,

$$\frac{dy}{y-(b/a)} = -adt \Rightarrow \ln\left|y-(b/a)\right| = -at + C \Rightarrow \boxed{y = (b/a) + ce^{-at}}$$

Solução geral

Caso II: Coeficientes variáveis: Métodos dos Fatores integrantes $\mu(t)$

Reescrevendo a equação 2

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y} = g(t)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{(\quad)'}$$

O objetivo é encontrar um fator integrante que transforme o lado esquerdo da equação acima em uma única derivada, que permite a integração direta em relação a *t*.

Coeficientes variáveis: Métodos dos Fatores integrantes μ(t)

Multiplicando 2 por μ(t)

$$\underbrace{\mu(t)\frac{dy}{dt}+\boxed{\mu(t)\,p(t)}\,y}=\mu(t)\,g(t)$$

$$\frac{d(\mu y)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\mu y)}{dt}=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y$$

$$\Downarrow$$

Para que esta estratégia funcione é necessário que:

$$\boxed{3} \qquad \frac{d\mu}{dt}=\boxed{\mu\cdot p}$$

Equações Lineares

Coeficientes variáveis: Métodos dos Fatores integrantes μ(t)

Integrando 3 obtém-se o fator integrante

$$\int \frac{d\mu}{\mu(t)} = \int p(t)dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu(t) = e^{\int p(t)dt}} \qquad \boxed{4}$$

A constante da integral da Eq. 4 é igualada a 0, pois só precisamos de um fator integrante.

Coeficientes variáveis: Métodos dos Fatores integrantes $\mu(t)$

Etapas para utilização do método dos fatores integrantes

1. Escreva a ED na forma da equação 2. $$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$
2. Encontre o fator integrante. $$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$
3. Multiplique os dois lados da equação pelo fator integrante.
4. Resolva

Equações Lineares

Coeficientes variáveis: Métodos dos Fatores integrantes μ(t)

Exemplo: $xy' - y = x^3$

1. Escreva a ED na forma da equação 2.

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2$$

2. Encontre o fator integrante.

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$$

Coeficientes variáveis: Métodos dos Fatores integrantes μ(t)

Exemplo: $xy' - y = x^3$

3. Multiplique os dois lados da equação pelo fator integrante

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$$

4. Resolva (Regra da derivada de um produto)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = x \Rightarrow \int d\left(\frac{1}{x}y\right) = \int x\,dx \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^3}{2} + cx}$$

Equações Exatas e Fatores integrantes

Dada uma equação diferencial com a forma

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0 \qquad \boxed{5}$$

Suponha que seja possível identificar uma função ψ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)=M(x,y), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)=N(x,y),$$

e tal que $\Psi(x,y) = c$ define $y = \phi(x)$ implicitamente como uma função diferenciável em x.

Equações Exatas

Equações Exatas e Fatores integrantes

Então

$$M(x,y)+N(x,y)y' \overset{*}{=} \frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\psi\left[x,\phi(x)\right]$$

O que torna a equação 5 igual a

$$\frac{d}{dx}\psi\left[x,\phi(x)\right]=0$$ logo $$\psi\left[x,\phi(x)\right]=cte$$ $\boxed{\text{É a solução!}}$

*Lembre que se $\psi(x,y)$ então $d\psi(x,y)=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy$

Equações Exatas e Fatores integrantes

O seguinte teorema fornece um método sistemático para determinar ser uma equação diferencial é exata:

Teorema: Suponha que as funções *M, N,* M_y *e* N_x são contínuas na região retangular R: $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Então

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

É uma equação diferencial exata se, e somente se,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \qquad \boxed{6}$$

$$\begin{cases} M_y = \psi_{xy} \\ N_x = \psi_{yx} \end{cases}$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função ψ satisfazendo

$$\psi_x = M(x,y), \quad \psi_y = N(x,y),$$

se, e somente se, M e N satisfazem a Eq. 6.

Equações Exatas

Etapas para resolução de equações exatas:

1. Obter a forma padrão e verificar se a equação dada é exata (Eq. 6). $M_y = N_x$
2. Integrar $M = \Psi_x(x,y)$ em relação a x lembrando que a constante obtida é uma função de y, denominada $g(y)$.
3. Diferenciar o resultado $\Psi(x,y)$ em relação a y e igualar a N e utilizar a equação obtida para obter $g(y)$.
4. Para obter a solução geral igualar $\Psi(x,y)$ e a uma constante [$\Psi(x,y) = C$]

Obs: Em alguns casos é mais fácil integrar $N = \Psi_y(x,y)$ em relação a y no passo 2, diferenciar o resultado em relação a x e igualar a M no passo 3 e utilizar a equação obtida no passo 2 para obter $g(x)$.

Equações Exatas e Fatores integrantes

Exemplo: Resolva $\underbrace{\left(y\cos x+2xe^{y}\right)}_{M}+\underbrace{\left(senx+x^{2}e^{y}-1\right)}_{N}y'=0$

Como $M_{y}=\left(\cos x+2xe^{y}\right)=N_{x}$ a equação acima é exata de forma que existe uma função ψ (x,y) tal que:

$$M=\frac{\partial\psi}{\partial x}=\left(y\cos x+2xe^{y}\right)\xRightarrow{\int Mdx}\psi\left(x,y\right)=ysenx+x^{2}e^{y}+\boxed{g\left(y\right)}\qquad\boxed{7}$$

$$N=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\left(senx+x^{2}e^{y}-1\right)$$

Equações Exatas

Equações Exatas e Fatores integrantes

Fazendo $\psi_y = N$

$$\psi_y(x,y) = senx + x^2e^y + g'(y) = senx + x^2e^y - 1$$

Portanto, *g'(y) = -1* e *g(y) = -y* . A constante pode ser omitida pois qualquer solução pode ser utilizada. Substituindo g(y) em 7, obtem-se.

$$\psi(x,y) = ysenx + x^2e^y - y$$

Desta forma, as soluções são obtidas implicitamente por $ysenx + x^2e^y - y = c$

Lembre que $\dfrac{d}{dx}\psi(x,\phi(x)) = 0$ em uma equação exata.

Equações Exatas

Equações Exatas e Fatores integrantes

Algumas vezes é possível transformar uma equação diferencial que não é exata em uma exata, multiplicando-se a equação por um fator integrante apropriado.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \xRightarrow{\cdot\mu(x,y)} \mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad \Rightarrow \quad M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \qquad \boxed{8}$$

Condição necessária para ser exata

Se for possível encontrar a função μ que satisfaça 8, obtém-se uma equação exata que pode ser solucionada pelo método apresentado anteriormente.

Podem existir mais de uma solução μ que atenda 8 e qualquer uma delas pode ser empregada.

Equações Exatas e Fatores integrantes

Este método se torna eficaz quando a função μ depende apenas de x ou y, o que facilita a obtenção do fator integrante. Supondo que μ seja uma função apenas de x, obtém-se:

$$(\mu M)_y = \mu M_y = (\mu N)_x, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}$$

Logo

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$ ou, quando μ (y) $$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu$$

Equações Exatas

Equações Exatas e Fatores integrantes

Quando $\mu = \mu(x)$, o termo em destaque só pode conter x's :

f(x)

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \exp\left(\int \boxed{\frac{M_y - N_x}{N}} dx\right)$$

Quando $\mu = \mu(y)$, o termo em destaque só pode conter y's :

f(y)

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = \exp\left(\int \boxed{\frac{N_x - M_y}{M}} dy\right)$$

Equações Exatas e Fatores integrantes

Etapas para resolução de equações exatas:

1. Verificar se a equação dada é exata.
2. Se não for, tente encontrar um fator integrante $\mu(x)$ ou $\mu(y)$ com auxílio das equações do slide anterior.
3. Multiplique a equação diferencial pelo fator integrante obtido.
4. Resolva a equação exata obtida.

Equações Exatas e Fatores integrantes

Exemplo: Resolva a equação abaixo encontrando um fator integrante que a transforme em uma equação diferencial exata.

$$\left(3xy + y^2\right) + \left(x^2 + xy\right) y' = 0 \qquad \boxed{9}$$

Inicialmente obtém-se o termo *(M_y-N_y)/N*

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - \left(2x + y\right)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

Logo $\dfrac{d\mu}{dx} = \dfrac{\mu}{x}$ $\therefore$ $\mu\left(x\right) = x$ (fator integrante)

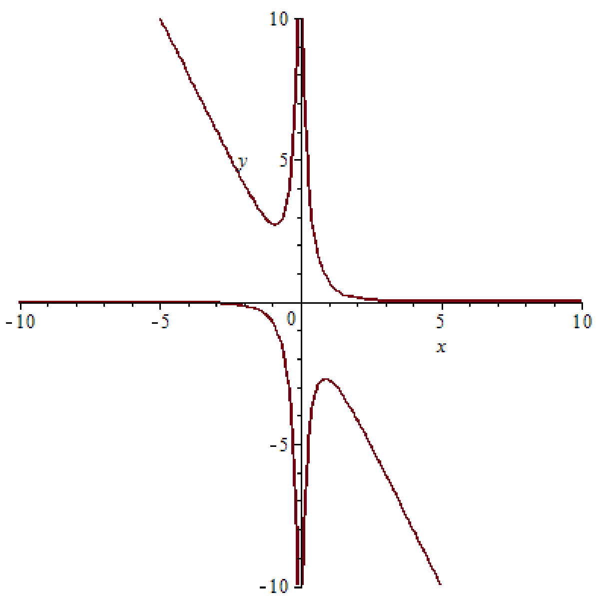
Equações Exatas e Fatores integrantes

Multiplicando a eq. 9 pelo fator integrante

$$\left(3x^2y + xy^2\right) + \left(x^3 + x^2y\right)y' = 0$$

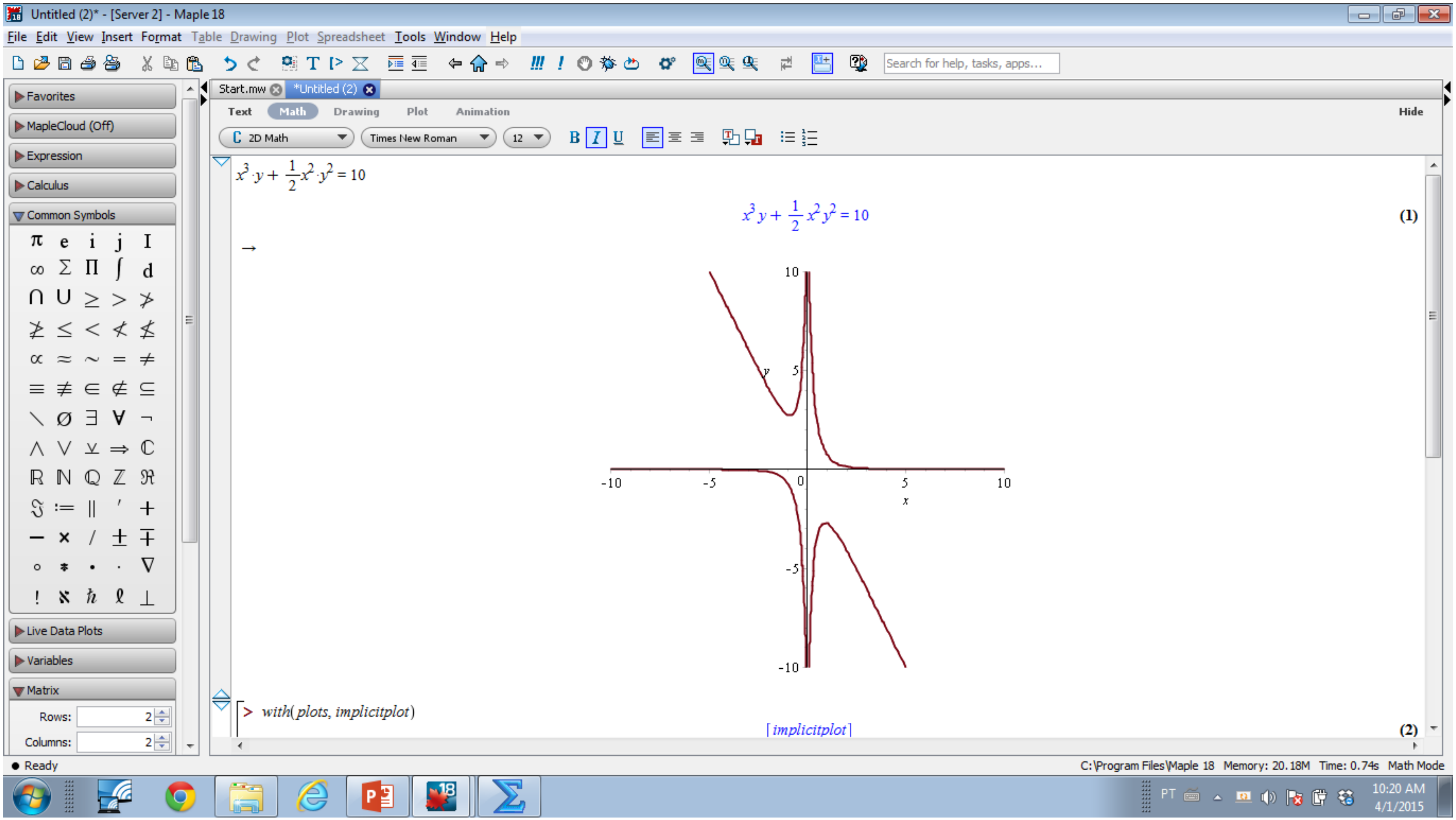
Esta equação é exata cuja solução é obtida de forma implícita em y como

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$$



Equações Exatas

Equações Exatas e Fatores integrantes



Equações autônomas

Quando o uma equação diferencial assume a forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

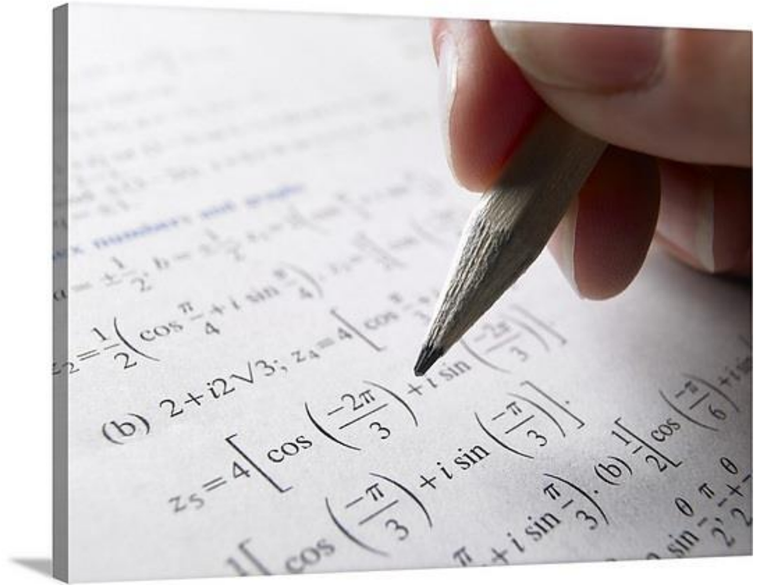
Ela é classificada como equação autônoma, pois as derivadas não dependem explicitamente da variável independente (t).

Note que a variável t não aparece no lado direito da equação acima.

Lista de exercícios

Lista 2 e Lista 3 (até exercício 3).

.



Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; IÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.