



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 2

Classificação e Solução

Prof. Diogo Lôndero da Silva

<http://diogolondero.wix.com/seds>

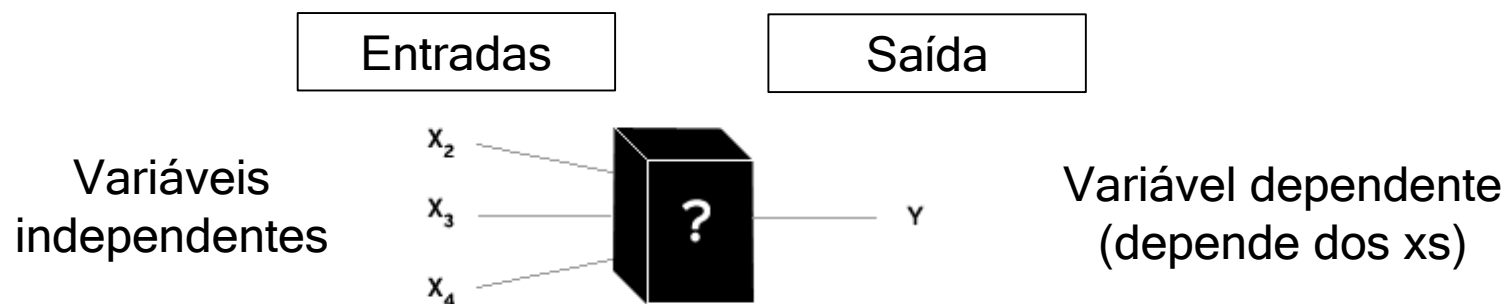


Classificações

Definição: uma equação diferencial é aquela que relaciona uma função desconhecida com uma ou mais de suas derivadas.

Essa função relaciona variáveis dependentes e independentes.

Variáveis independentes e dependentes



Em uma equação diferencial a variável dependente é derivada em relação às variáveis independentes.

$$y'' + y' + 3 = 0$$



Classificações

Com o objetivo de organizar as EDs em diferentes categorias, que facilitam a escolha do método de solução mais adequado, são empregadas as seguintes classificações:

- ✓ **Ordinária** (EDO) versus **Parcial** (EDP) - Ao contrário das EDPs, as EDOs apresentam apenas uma variável independente.
- ✓ **Ordem de uma equação diferencial**: A ordem de uma ED é definida pela mais alta derivada da função incógnita presente à equação diferencial.



Classificações

- ✓ **Homogênea** versus **Não Homogênea** - será homogênea se o termo que independe da função incógnita e suas derivadas é identicamente nulo.
- ✓ **Linear** versus **Não Linear** - Uma ED linear **não deve** conter: Produtos entre a função incógnita e suas derivadas, potências da função incógnita diferentes de 1 e função incógnita como argumento de funções trigonométricas.

Obs:

(i) Antes de classificar uma ED deve-se escrevê-la na **forma padrão**. Uma ED estará na forma padrão quando o coeficiente da derivada de mais alta ordem for igual a um.

Ex: $xy'' + 2y = 0$ é escrita na forma padrão como $y'' = -(2/x)y$

(ii) Uma ED sempre deve apresentar **consistência dimensional!**



Classificações

Exemplos

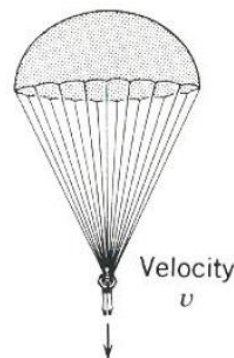
➤ $9y(x)y'(x) + 4x = 0$ EDO de 1ª ordem, não linear e homogênea

➤ $\ddot{u}(x, t) = \frac{E}{\rho} u_{,xx}(x, t)$ EDP de 2ª ordem, linear e homogênea

➤ $\ddot{\theta}(t) + \frac{L}{g} \sin \theta(t) = 0$ EDO de 2ª ordem, não linear e homogênea

Determine a unidade de b , sendo v [m/s], t [s], m [kg] e g [m/s²]

Parachutist
 $mv' = mg - bv^2$





Classificações

Exemplos

Equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V}$$

Componente x da equação de Navier-Stokes incompressível:

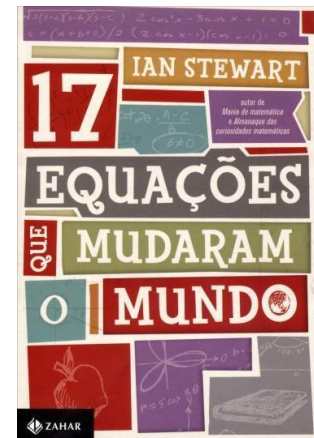
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Componente y da equação de Navier-Stokes incompressível:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Componente z da equação de Navier-Stokes incompressível:

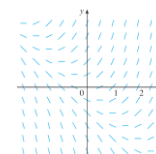
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$





Solução

Quando existir, a solução de uma equação diferencial pode ser obtida de diferentes formas:



- ✓ **Analiticamente:** Obtenção analítica de uma família de funções.
- ✓ **Graficamente:** Obtenção das inclinações da solução (Campos de direções)
- ✓ **Numericamente:** Obtenção da solução em pontos previamente definidos (Cálculo numérico).

Mesmo sem uma solução **analítica**, podemos ainda aprender muito sobre a solução por meio de uma **abordagem gráfica** (campos de direções) ou de uma **abordagem numérica** (método de Euler).



Solução Analítica

Integração

- A integração pode ser vista como o processo inverso da diferenciação.
- A resolução de uma equação diferencial é essencialmente um processo de encontrar o resultado de $\int y'(x) dx$ quando $y'(x)$ é fornecida. Note que:

$$\int y'(x) dx = \int dy = y(x) + C$$



Importante

- Duas funções que diferem apenas por uma constante tem a mesma inclinação.
- A constante C é adicionada no processo de integração indefinida para recuperar a constante perdida durante a diferenciação e $y(x)$!



Solução analítica

Solução analítica:

Por exemplo, quando consideramos a equação diferencial

$$y' = xy$$

entendemos que y seja uma função desconhecida de x .

Uma função f é denominada solução de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação acima se

$$f'(x) = x \cdot f(x)$$

para todos os valores de x em algum intervalo.



Solução analítica

- ✓ Quando nos pedem para resolver uma equação diferencial, **espera-se que encontremos todas as soluções possíveis da equação**. Já resolvemos algumas equações diferenciais particularmente simples; a saber, aquelas da forma:

$$y' = f(x)$$

- ✓ Por exemplo, sabemos que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

onde C é uma constante qualquer.



Solução analítica

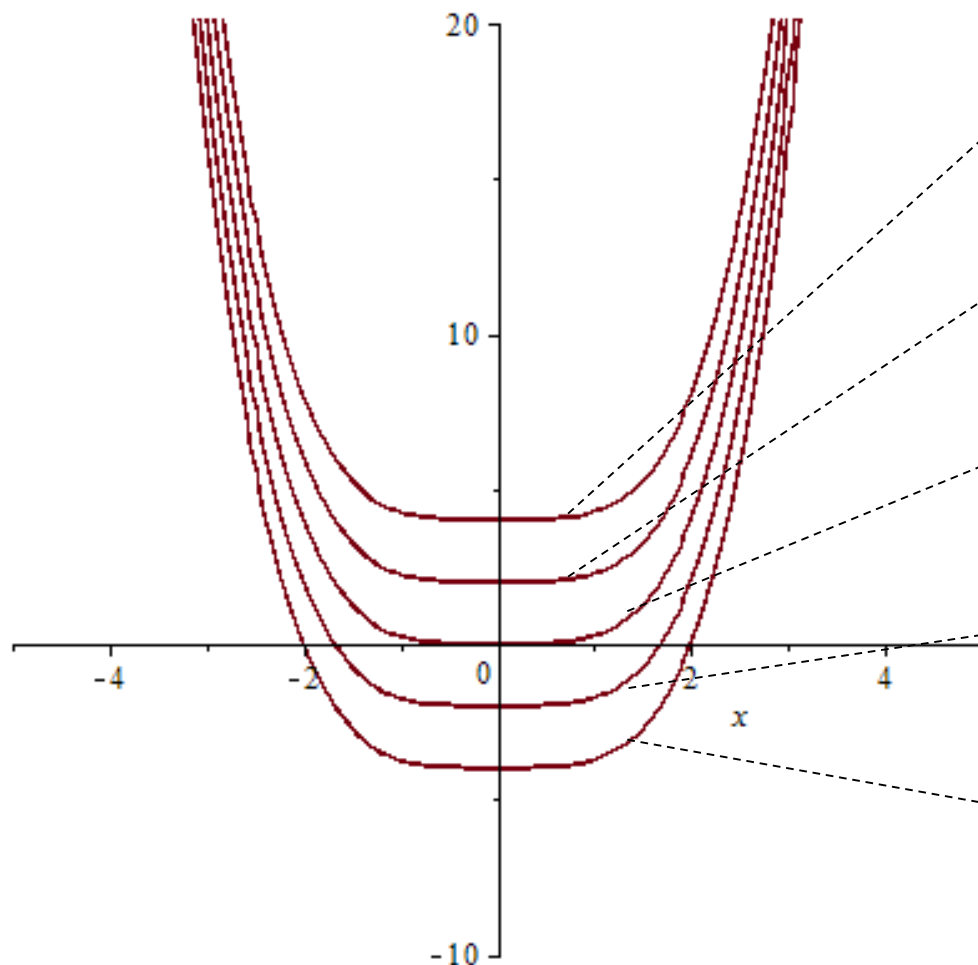
Solução analítica:

$$y' = x^3$$



$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

Solução geral



$$y = \frac{x^4}{4} + 4$$

$$y = \frac{x^4}{4} + 2$$

$$y = \frac{x^4}{4} + 0$$

$$y = \frac{x^4}{4} - 2$$

$$y = \frac{x^4}{4} - 4$$

Soluções específicas¹¹



Solução analítica

Solução analítica:

- ✓ Quando aplicamos as equações diferenciais, geralmente **não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções** (a solução geral) quanto em **encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais**.
- ✓ Essas condições podem ser do tipo: (i) **condições iniciais** ou (ii) **condições de contorno**.



Solução analítica

Solução analítica:

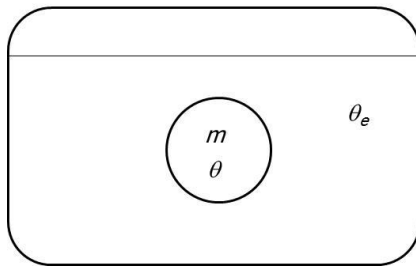
- ✓ Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que **satisfaça uma condição em um dados instante de tempo, do tipo $y(t_0) = y_0$** . Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é denominado **problema de valor inicial**.
- ✓ Em outros tipos de problema a condição é estabelecida em uma **posição do domínio do tipo $y(L) = y_L$** . Esta é uma **condição de contorno** que ocorre em **problemas de valor de contorno**.



Solução analítica

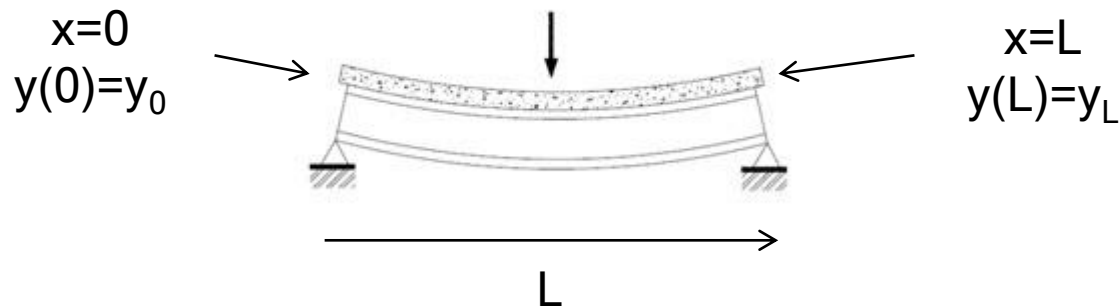
Solução analítica:

- ✓ Problema de **valor inicial** - A variável de entrada é o **tempo** (t)



$$t=0$$
$$\theta(0) = \theta_0$$

- ✓ Problema de **valor de contorno** - A variável de entrada é a **posição** (x)





Solução analítica

- ✓ Problema de **valor de contorno** - A variável de entrada é a **posição** (x)

Equação da difusão de calor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0$$

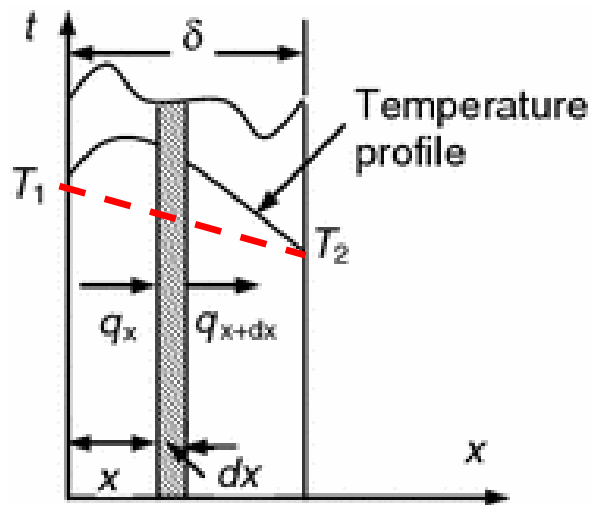
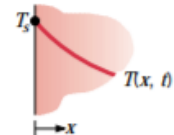


TABLE 2.2 Boundary conditions for the heat diffusion equation at the surface ($x = 0$)

1. Constant surface temperature

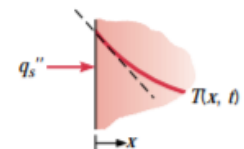
$$T(0, t) = T_s \quad (2.29)$$



2. Constant surface heat flux

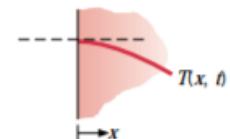
- (a) Finite heat flux

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s'' \quad (2.30)$$



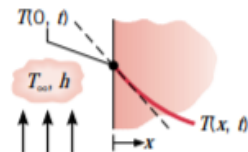
- (b) Adiabatic or insulated surface

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.31)$$



3. Convection surface condition

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)] \quad (2.32)$$





Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

- ✓ Suponha que nos peçam para esboçar o gráfico da solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y$$

$$y(0) = 1$$

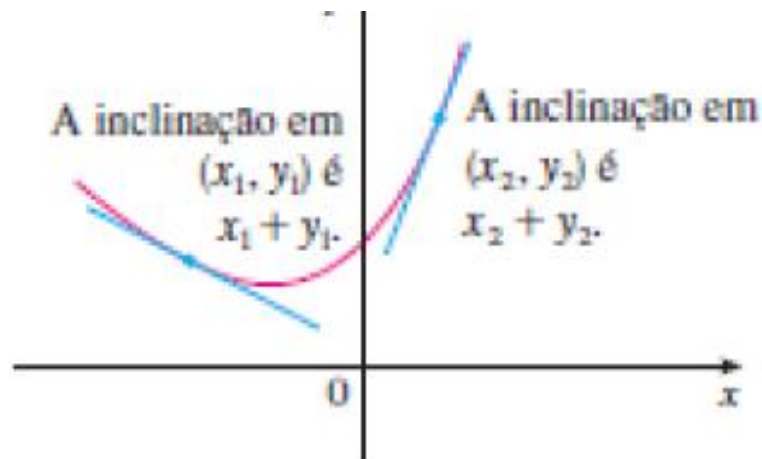
- ✓ Não conhecemos uma função para a solução, então como é possível que esboçemos seus gráficos?
- ✓ Vamos pensar sobre o que uma equação diferencial significa.



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

- ✓ A equação $y' = x + y$ nos diz que a inclinação em qualquer ponto (x, y) no gráfico (chamado curva solução) é igual à soma das coordenadas x e y do ponto (veja a Figura 1).



Uma solução de $y' = x + y$

Figura 1

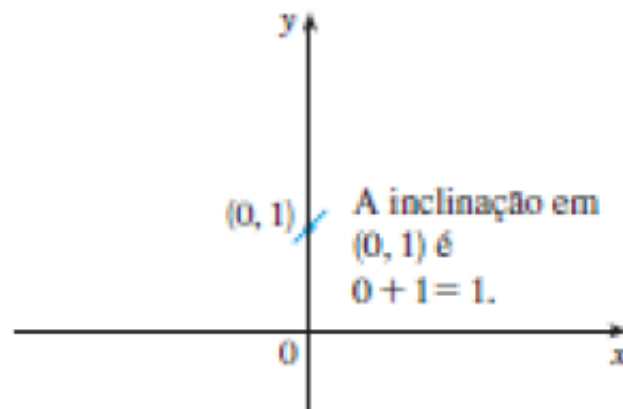


Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

- ✓ Em particular, como a curva passa pelo ponto $(0, 1)$, sua inclinação ali deve ser $0 + 1 = 1$. Assim, uma pequena porção da curva solução próxima ao ponto $(0, 1)$ parece um segmento de reta curto que passa por $(0, 1)$ com inclinação 1 (veja a Figura 2).

Configure sua calculadora
para operar em graus!



Início da curva solução que passa por $(0, 1)$

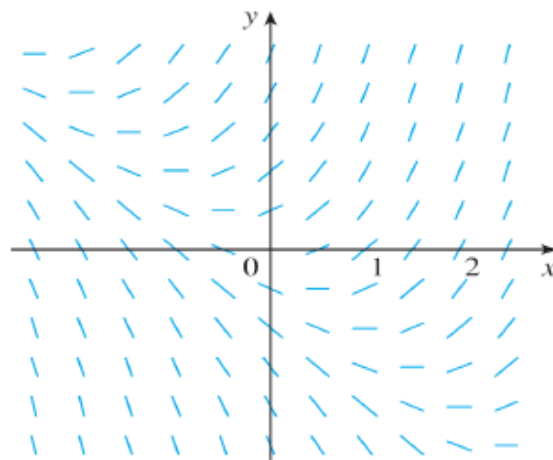
Figura 2



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

- ✓ Como um guia para esboçar o restante da curva, vamos desenhar pequenos segmentos de reta em diversos pontos (x, y) com inclinação $x + y$. O resultado, denominado campo de direções, é mostrado na Figura 3.



Campo de direção para $y' = x + y$

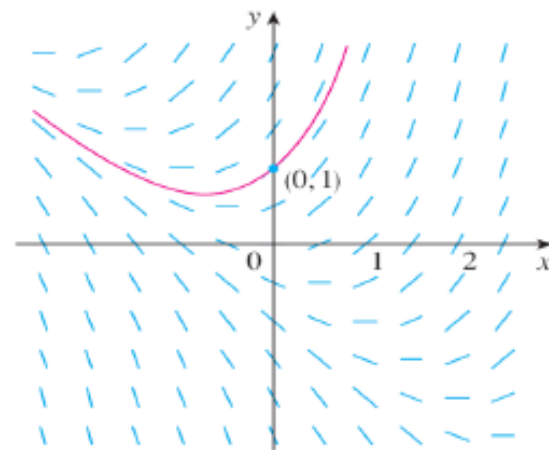
Figura 3



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

- ✓ Por exemplo, o segmento de reta no ponto $(1, 2)$ tem inclinação $1 + 2 = 3$. O campo de direções nos permite visualizar o formato geral das curvas solução pela indicação da direção na qual as curvas prosseguem em cada ponto.
- ✓ Agora, podemos esboçar a curva solução que passa pelo ponto $(0, 1)$, seguindo o campo de direções como na Figura 4.



A curva solução que passa por $(0, 1)$

Figura 4



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

- ✓ Observe que desenhemos a curva de modo a **torná-la paralela aos segmentos de reta próximos**.
- ✓ Em geral, suponha que tenhamos uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$y' = F(x, y)$$

onde $F(x, y)$ é alguma expressão em x e y . A equação diferencial diz que a inclinação da curva solução no ponto (x, y) na curva é $F(x, y)$.



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

- ✓ Se desenharmos **pequenos segmentos de reta** com inclinação $F(x, y)$ em vários pontos (x, y) , o resultado será chamado **campo de direções** (ou campo de inclinações).
- ✓ Esses segmentos de reta **indicam a direção na qual uma curva solução está seguindo**, de modo que o campo de direções nos ajuda a **visualizar o formato geral dessas curvas**.



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

Exemplo:

(a) Esboce o campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Use a parte (a) para esboçar a curva solução que passa pela origem.

SOLUÇÃO:

(a) Podemos começar calculando a inclinação em vários pontos na seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

Agora, podemos desenhar pequenos segmentos de reta com essas inclinações nesses pontos. O resultado é o campo de direções mostrado na Figura 5.

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

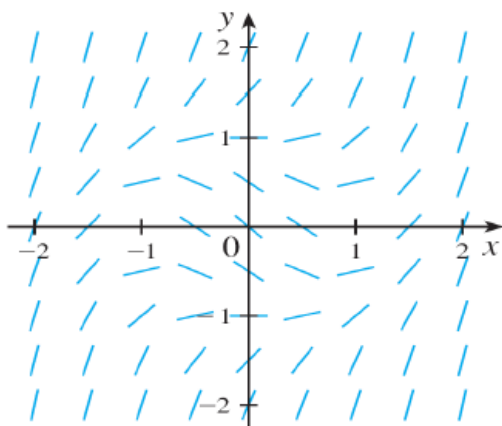


Figura 5

Configure sua calculadora
para operar em graus!



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

(b) Podemos começar na origem e nos mover para a direita na direção do segmento de reta (que tem inclinação -1). Continuamos a desenhar a curva solução de maneira que ela se mova paralela aos segmentos de reta próximos.

A curva solução resultante é exposta na Figura 6. Voltando para a origem, desenhamos a curva solução para a esquerda da mesma maneira.

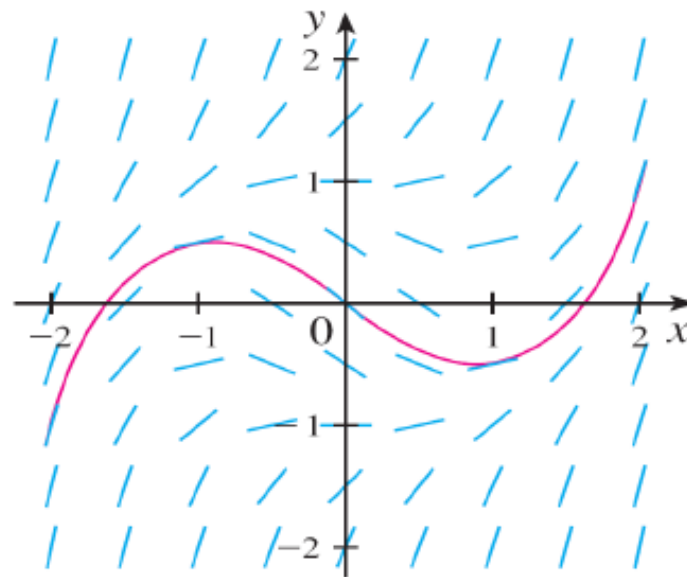


Figura 6



Solução geométrica

Solução geométrica (Campos de direções)

Campo de direções anterior obtido com o Maple.

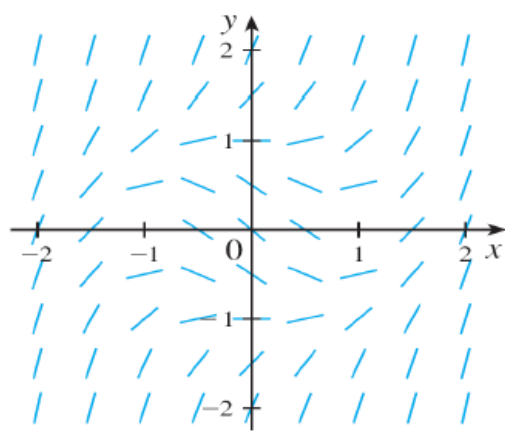
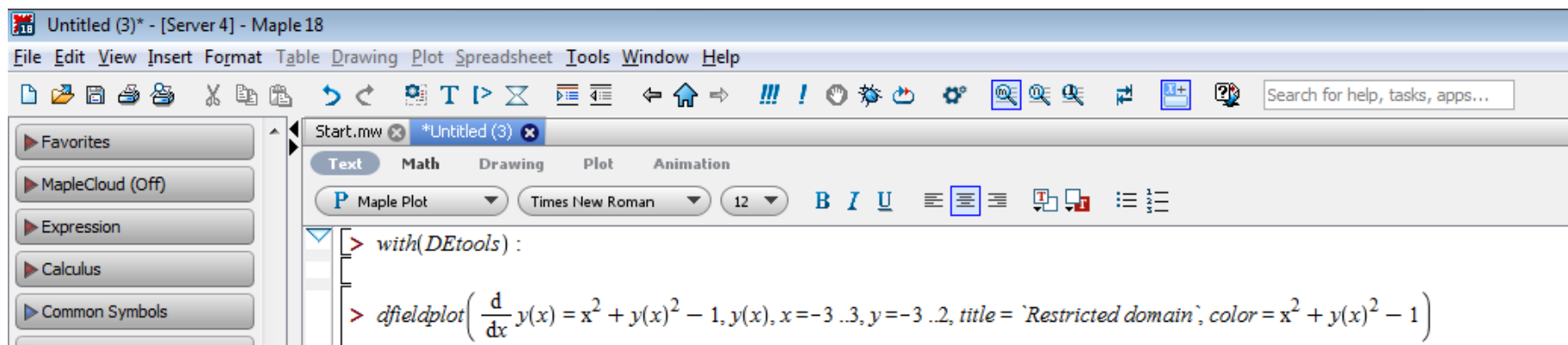
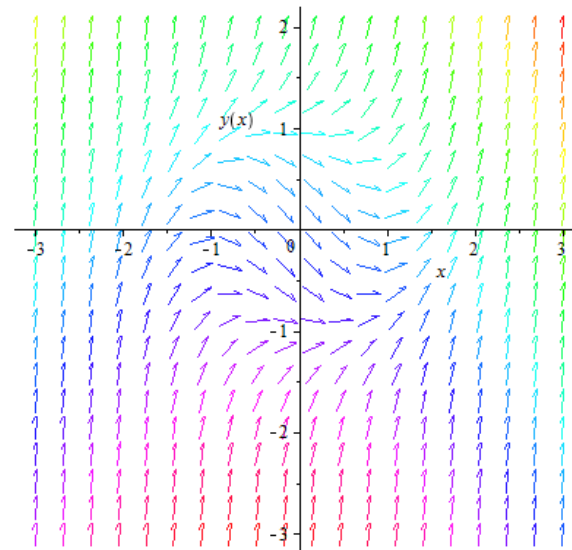
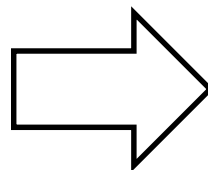


Figura 5





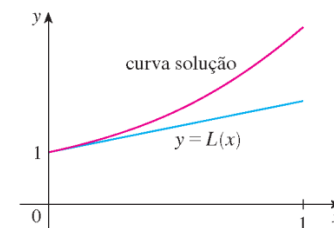
Solução numérica

Solução numérica - Método de Euler



- ✓ A **ideia** básica dos **campos de direções** pode ser usada para encontrar **aproximações numéricas** para as **soluções** das equações diferenciais. Ilustramos o método no problema de valor inicial que utilizamos para introduzir os campos de direções:

$$y' = x + y \quad y(0) = 1$$



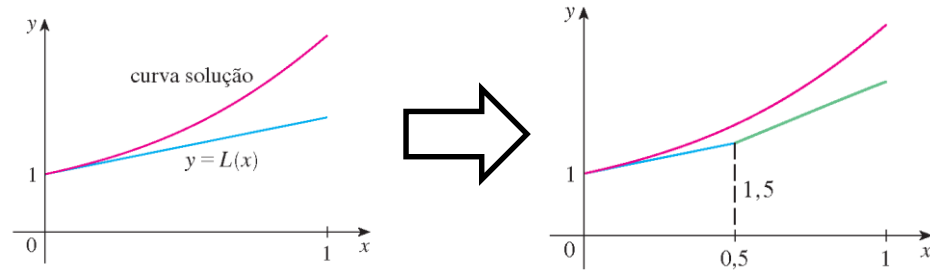
- ✓ A equação diferencial diz que $y'(0) = 0 + 1 = 1$; dessa forma, a curva solução tem inclinação 1 no ponto $(0, 1)$. Como uma primeira aproximação para a solução, poderíamos usar uma **aproximação linear** $L(x) = x + 1$.



Solução numérica

Solução numérica - Método de Euler

- ✓ A ideia de Euler era **melhorar essa aproximação** percorrendo apenas uma **pequena distância** e, então, fazer uma correção no meio do caminho, mudando a direção, como indicado pelo campo de direções.
- ✓ A Figura 13 mostra o que acontece se começamos ao longo da reta tangente, mas paramos quando $x = 0,5$ (passo ou incremento). Como $L(0,5) = 1,5$, temos $y(0,5) \approx 1,5$ e tomamos $(0,5, 1,5)$ como o ponto de partida para um novo segmento de reta.





Solução numérica

Solução numérica - Método de Euler

1. Em geral, o método de Euler diz para **começarmos no ponto dado pelo valor inicial** e prosseguirmos na direção indicada pelo campo de direções.
2. Paramos após um intervalo de tempo, **olhamos para a inclinação na nova localização** e prosseguimos naquela direção.
3. Continuamos **parando e mudando de direção** de acordo com o campo de direções.

O método de Euler não produz a solução exata para um problema de valor inicial ele fornece aproximações.



Solução numérica

Solução numérica - Método de Euler

Método de Euler Os valores aproximados para a solução do problema de valor inicial $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, com passo h , em $x_n = x_{n-1} + h$, são

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Obtenha esta equação a partir da definição de derivada!



Solução numérica

Exemplo Solução numérica - Método de Euler

Use o método de Euler com o passo 0,1 para construir uma tabela de valores aproximados para a solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \quad y(0) = 1$$

SOLUÇÃO: Sabemos que $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $F(x, y) = x + y$. Logo, temos:

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362$$

Isso significa que, se $y(x)$ é a solução exata, então $y(0,3) \approx 1,362$.



Solução numérica

Exemplo Solução numérica - Método de Euler

n	x_n	y_n	$F_n(x,y)$ y'_n	hF_n	$y_{n+1}=y_n+hF_n$
0	x_0+0h	y_0			
1	x_0+1h	y_1			
2	x_0+nh	y_n			

.
. $\underbrace{\hspace{10em}}$
. Pares
. ordenados
. (x,y) para
. construção do
 gráfico



Solução numérica

Exemplo Solução numérica - Método de Euler

Prosseguindo com cálculos similares, temos os valores na tabela:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0,1	1,100000	6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000	7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000	8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200	9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020	10	1,0	3,187485



Solução numérica

Exemplo Solução numérica - Método de Euler

A seguinte tabela mostra os resultados da aplicação do método de Euler com diminuição do tamanho do passo para o problema de valor inicial.

Passo	Estimativa de Euler para $y(0,5)$	Estimativa de Euler para $y(1)$
0,500	1,500000	2,500000
0,250	1,625000	2,882813
0,100	1,721020	3,187485
0,050	1,757789	3,306595
0,020	1,781212	3,383176
0,010	1,789264	3,409628
0,005	1,793337	3,423034
0,001	1,796619	3,433848

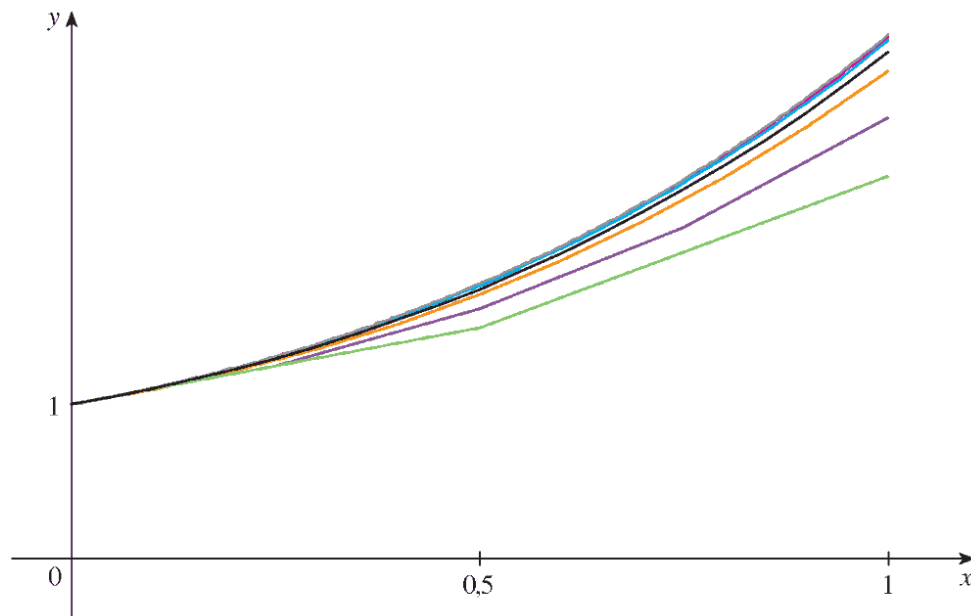
Observe que as estimativas de Euler na tabela parecem estar se aproximando de limites, a saber, os valores verdadeiros (solução analítica) de $y(0,5)$ e $y(1)$.



Solução numérica

Exemplo Solução numérica - Método de Euler

A abaixo mostra os gráficos das aproximações de Euler com os passos 0,5; 0,25; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01 e 0,005. Eles estão se aproximando da curva solução exata (analítica) à medida que o passo h se aproxima de 0.



Exercício: construa um código computacional para resolver este exemplo. Compare graficamente os resultados de diferentes passos com a solução analítica.



Conclusões

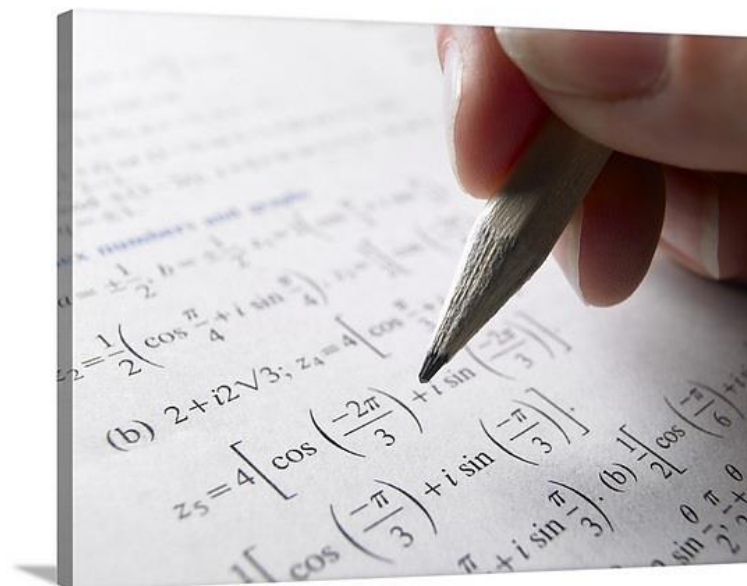
- ✓ A **solução analítica** fornece a solução exata de uma equação diferencial;
- ✓ Mesmo quando não é possível obter a solução analítica é possível analisar uma equação diferencial empregamos métodos geométricos e numéricos.
- ✓ Os métodos geométricos e numéricos fornecem apenas aproximações da solução exata.
- ✓ O método numérico fornece soluções aproximadas e discretas (tabela de valores).
- ✓ A disciplina EMB5014 será focada na obtenção de **soluções analíticas** para equações diferenciais.





Lista de exercícios

Lista 1





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.