



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 4

Aplicações de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Prof. Diogo Lôndero da Silva



Sumário

Aplicações a serem investigadas

1. Crescimento populacional / aprendizado;
2. Juros compostos;
3. Velocidade de escape;
4. Circuitos elétricos;
5. Problemas de misturas e diluição. (Aula 3)
6. Resfriamento/aquecimento de um corpo. (Aula 1)



Sumário

Soluções EDO primeira ordem

1. Geométrica (campos de direções);
2. Numérica (Método de Euler);
3. Analítica;
 - a) Separáveis;
 - b) EDO Lineares;
 - c) Exatas;



Crescimento populacional

Lei do crescimento natural

Em geral, se $P(t)$ for o valor de uma quantidade y no tempo t , e se a taxa de variação de y com relação a t for proporcional a seu tamanho $P(t)$ em qualquer tempo, então:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad \boxed{1}$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é algumas vezes chamada lei do crescimento natural. Se k for positivo, então a população aumenta; se k for negativo, ela diminui.



Crescimento populacional

Lei do crescimento natural

Como a Equação 1 é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la pelo método a seguir:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt + C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

onde A ($= \pm e^C$ ou 0) é uma constante arbitrária.



Crescimento populacional

Lei do crescimento natural

Para percebermos o significado da constante A , observamos que:

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Portanto, A é o valor inicial da função.

2 A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad P(0) = P_0$$

é

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$



Crescimento populacional

Lei do crescimento natural

Outra maneira de escrever a Equação 1 é

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k$$

que diz que a **taxa de crescimento relativa** (a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população) é constante. Então, a Eq. 2 diz que a população com uma taxa de crescimento relativo constante deve crescer exponencialmente.



Crescimento populacional

Lei do crescimento natural

Podemos levar em conta a emigração (ou a remoção) de uma população modificando a Equação 1: se a taxa de emigração for uma constante m , então a taxa de mudança da população é modelada pela equação diferencial.

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \quad \boxed{3} \quad \frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Exercício: Resolva a eq. 3.

$$P(t) = \frac{m}{k} [1 - e^{kt}] + P_0 e^{kt}$$



Crescimento populacional

Modelo logístico

Como estudamos anteriormente, uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Se $P(t)$ for o tamanho da população no instante t , assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \quad \text{se } P \text{ for pequeno}$$

Isso diz que a taxa de crescimento inicialmente está próxima de ser proporcional ao tamanho.



Crescimento populacional

Modelo logístico

Em outras palavras, a taxa de crescimento relativo é praticamente constante quando a população é pequena. Mas também queremos refletir o fato de que a taxa de crescimento relativo diminui quando a população P aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa sua capacidade de suporte M , a população máxima que um ambiente é capaz de sustentar a longo prazo. A expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo que incorpora essas hipóteses é

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \left(1 - \frac{P}{M} \right)$$



Crescimento populacional

Modelo logístico

Multiplicando por P , obtemos o modelo para o crescimento populacional conhecido como a equação diferencial logística:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M} \right)$$

4



Crescimento populacional

Modelo logístico

A equação logística é separável e podemos resolvê-la explicitamente. Uma vez que

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M} \right)$$

temos

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k \, dt$$

5



Crescimento populacional

Modelo logístico

Para calcularmos a integral no lado esquerdo, escrevemos

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Usando frações parciais, temos

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$



Crescimento populacional

Modelo logístico

Isso nos permite reescrever a Equação 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P} \right) dP = \int k dt$$

$$\ln |P| - \ln |M - P| = kt + C$$

$$\ln \left| \frac{M - P}{P} \right| = -kt - C$$

$$\left| \frac{M - P}{P} \right| = e^{-kt-C} = e^{-C} e^{-kt}$$

$$\frac{M - P}{P} = A e^{-kt}$$

6

onde $A = \pm e^{-C}$.



Crescimento populacional

Modelo logístico

Isolando P na Equação 6, obtemos:

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

então

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos o valor de A colocando $t = 0$ na Equação 6. Se $t = 0$, então $P = P_0$ (a população inicial); portanto

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$



Crescimento populacional

Modelo logístico

Então, a solução para a equação logística é

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{M - P_0}{P_0}$$

7

Usando a expressão para $P(t)$ na Equação 7, vemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = M$$

que é o esperado.



Crescimento populacional

Exemplo: Modelo logístico

Escreva a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0,08P \left(1 - \frac{P}{1.000} \right) \quad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar a população $P(40)$ e $P(80)$. Quando a população alcançará 900?



Crescimento populacional

Exemplo: Modelo logístico

A equação diferencial é uma equação logística com $k = 0,08$, capacidade de suporte $M = 1.000$ e população inicial $P_0 = 100$. Portanto, a Equação 7 dá a população no instante t como

$$P(t) = \frac{1.000}{1 + Ae^{-0,08t}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{1.000 - 100}{100} = 9$$

Logo,

$$P(t) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-0,08t}}$$



Crescimento populacional

Exemplo: Modelo logístico

Assim, os tamanhos da população quando $t = 40$ e 80 são

$$P(40) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-3,2}} \approx 731,6$$

$$P(80) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-6,4}} \approx 985,3$$

A população alcançará 900 quando

$$\frac{1.000}{1 + 9e^{-0,08t}} = 900$$



Crescimento populacional

Exemplo: Modelo logístico

Resolvendo essa equação para t , temos

$$1 + 9e^{-0,08t} = \frac{10}{9}$$

$$e^{-0,08t} = \frac{1}{81}$$

$$-0,08t = \ln \frac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0,08} \approx 54,9$$

Logo, a população chega a 900 quando t for aproximadamente 55.



Crescimento populacional

Exemplo: Modelo logístico

Como uma verificação de nosso trabalho, traçamos a curva da população na Figura 3 e observamos onde ela intercepta a reta $P = 900$.

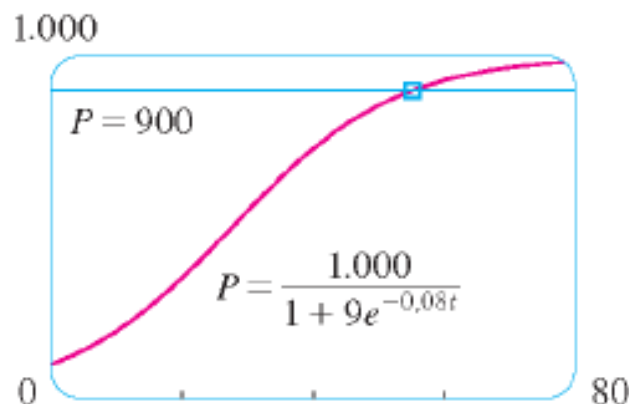


Figura 3

O cursor indica que $t \approx 55$.



Juros compostos

Juros compostos

Supondo que os juros sejam calculados continuamente, é possível escrever um problema de valor inicial que descreva o crescimento de um dado investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é dS/dt e essa quantidade é igual a taxa segundo a qual o investimento aumenta, que é a taxa de juros r vezes o valor corrente do investimento S . Assim,

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

8



Juros compostos

Juros compostos

Supondo que também sabemos o valor investimento em um instante particular, por exemplo:

$$S(0) = S_0 \quad \boxed{9}$$

Então, resolvendo a equação 8 e empregando a condição inicial 9 obtém-se:

$$S(t) = S_0 e^{rt} \quad \boxed{10}$$



Juros compostos

Juros compostos

Vamos comparar o resultados contínuos obtidos através da eq. 10 com a situação onde os juros são compostos em intervalos de tempo finitos por:

$$S(t) = S_0 (1 + r)^t \quad \boxed{11}$$

A tabela seguinte mostra o efeito do aumento da frequência de calculo para uma taxa de rendimento r de 8% ao ano. As segunda e terceira colunas são calculadas com a eq. 11 para frequências trimestrais e diárias, e a quarta coluna emprega a eq. 10 para o cálculo contínuo.



Juros compostos

Juros compostos

TABELA 2.3.1 Crescimento de Capital a uma Taxa de Rendimento de $r = 8\%$ para Diversas Composições dos Juros

Anos	$S(t)/S(t_0)$ da Eq. 11		$S(t)/S(t_0)$ da Eq. 10
	$m = 4$	$m = 365$	
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1717	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0203	11,0232
40	23,7699	24,5239	24,5325

Observa-se que a frequência dos cálculos não é muito significativa, justificando o uso da eq. 10.



Juros compostos

Juros compostos

Também é possível considerar depósitos ou saques, além do acréscimo de juros, dividendos ou ganhos de capital. Supondo que os saques ou depósitos sejam feitos a uma taxa constante k , então a eq. 10 torna-se:

$$\frac{dS}{dt} = rS + k \therefore \frac{dS}{dt} - rS = k \quad \boxed{12}$$

EDO linear

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$



Juros compostos

Juros compostos

A eq. 12 é uma EDO linear com fator integrante e^{-rt} , logo:

$$S(t) = ce^{rt} - (k / r)$$

Como $S(0) = S_0$

$$S(t) = S_0 e^{rt} + (k / r) (e^{rt} - 1)$$

13

Investimento
inicial

Depósitos ou
saques



Juros compostos

Juros compostos: Exemplo

Uma pessoa de 25 anos abre uma conta na qual investe R\$ 2.000,00 ao ano. Supondo que a taxa anual de rendimento seja 8%, qual será o saldo da conta quando a pessoa tiver 65 anos?

$S_0 = 0$, $r = 0,08$ /ano, $k = \text{R\$ } 2.000,00$

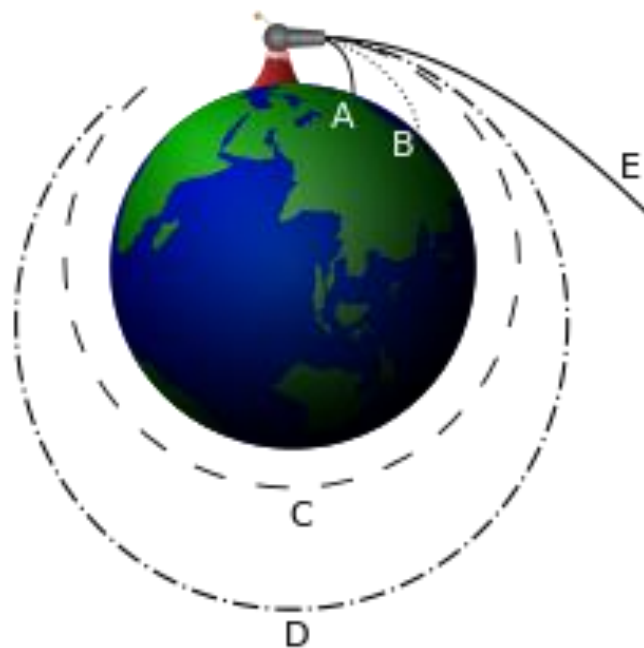
$$S(40) = 0e^{rt} + (2000 / 0.08)(e^{3,2} - 1) = 588.313$$



Velocidade de escape

Velocidade de escape

Supondo desprezível a resistência do ar é possível determinar a velocidade inicial necessária para elevar um corpo até uma altitude máxima da ξ acima da superfície da Terra e a menor velocidade inicial para a qual o corpo não retorne a Terra.



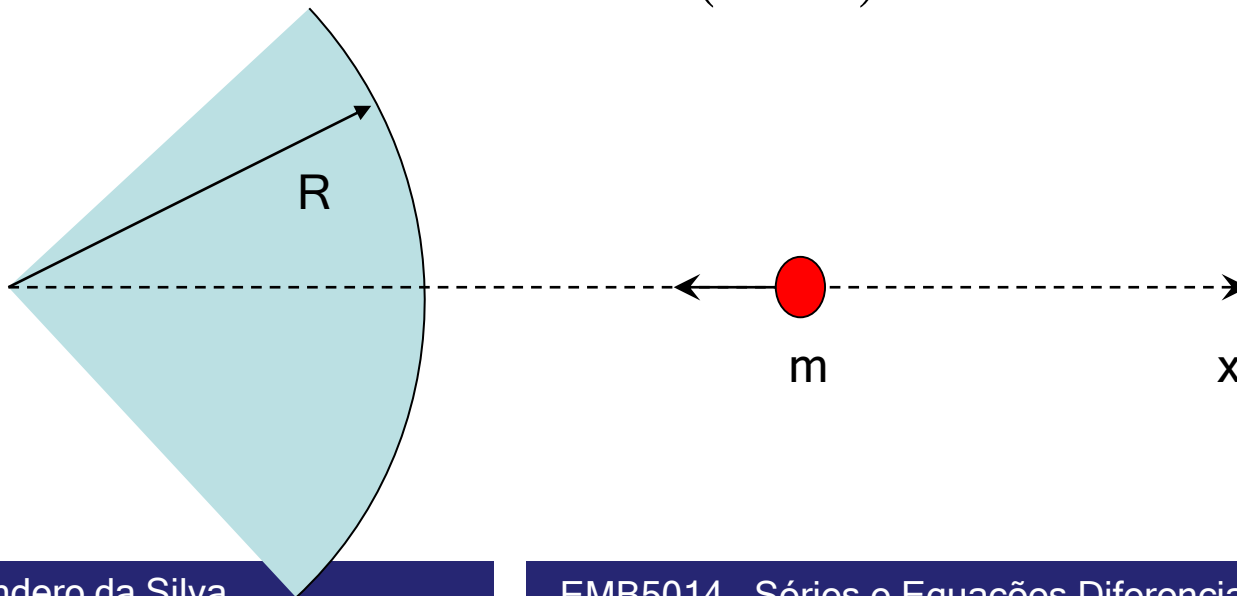


Velocidade de escape

Velocidade de escape

A força gravitacional agindo sobre um corpo é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro da Terra, sendo expressa por:

$$w(x) = -\frac{k}{(R+x)^2} \quad \boxed{14}$$



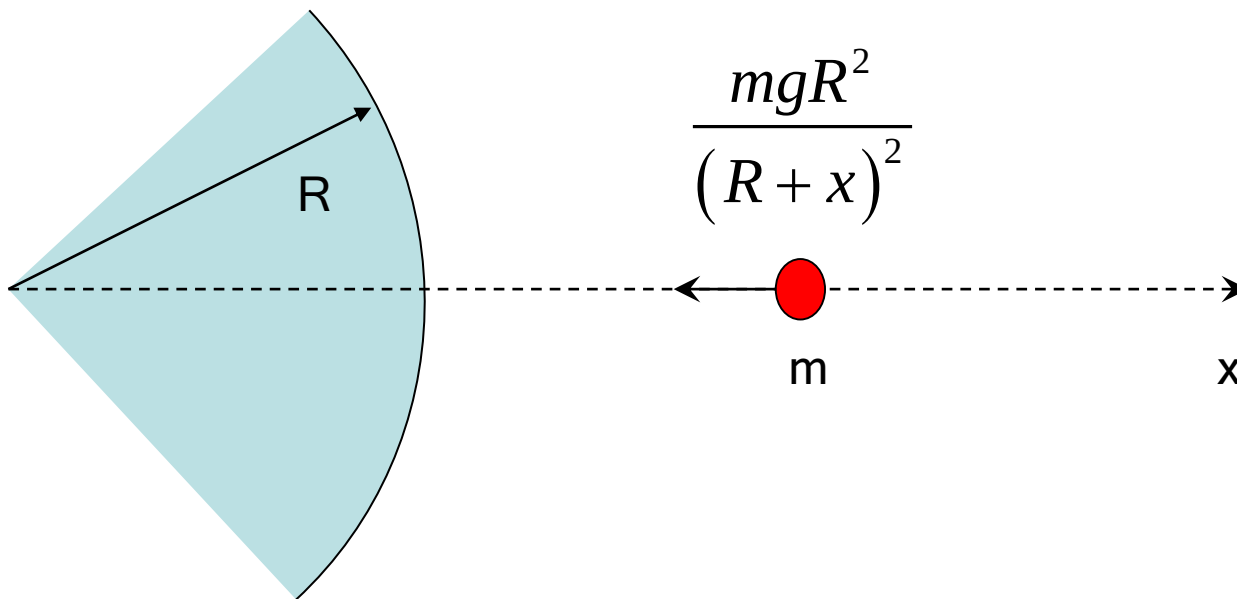


Velocidade de escape

Velocidade de escape

Sabemos que em $w(0) = -mg$ logo:

$$k = mgR^2 \therefore w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$$





Velocidade de escape

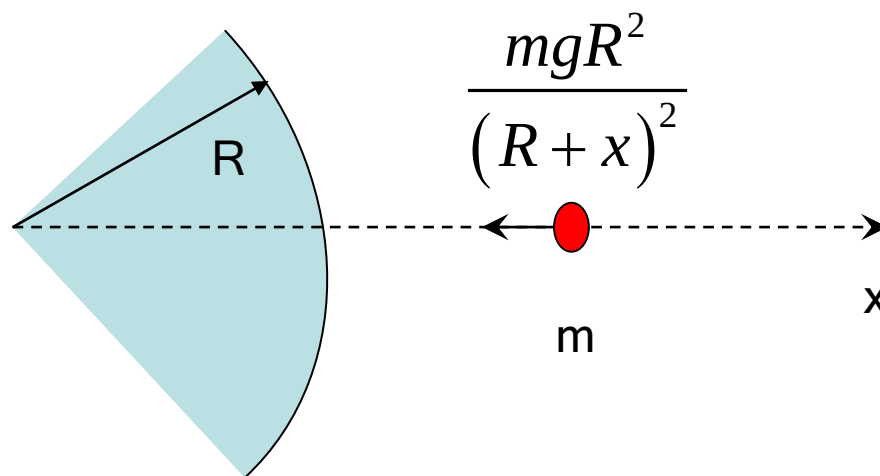
Velocidade de escape

Por meio de um balanço de Forças na partícula obtém-se:

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{mgR^2}{(R+x)^2} \quad \boxed{15}$$

Sendo a condição inicial:

$$v(0) = v_0$$





Velocidade de escape

Velocidade de escape

Como a eq. 15 possui muitas variáveis é possível eliminar t empregando a regra da cadeia:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \boxed{16}$$

Substituindo 16 em 15 obtém-se:

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{gR^2}{(R+x)^2} \therefore \frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c$$



Velocidade de escape

Velocidade de escape

Como $x=0$ quando $t=0$, a condição inicial $v(0)=v_0$ pode ser substituída pela condição $v=v_0$ quando $x=0$. Logo

$$c = \frac{v_0^2}{2} - gR$$

e

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}}$$

17



Velocidade de escape

Velocidade de escape

Para determinar a altura máxima atingida pelo corpo fazemos $v = 0$ e $x = \xi$ na eq. 17 e depois isolamos ξ , obtendo:

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2} \quad 18$$

Resolvendo a eq. 18 para v_0 obtem-se a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até ξ .

$$v_0 = \sqrt{2gR \frac{\xi}{R + \xi}} \quad 19$$



Velocidade de escape

Velocidade de escape

A velocidade de escape v_e é obtida fazendo $\xi \rightarrow \infty$ na eq. 19, resultando em:

$$v_e = \sqrt{2gR} \quad \boxed{20}$$

Para o planeta Terra, este valor é $11,1 \text{ km/s} \cong 40.000 \text{ km/h!}$





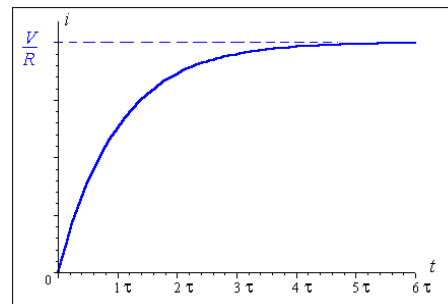
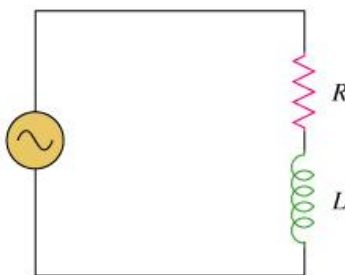
Circuito RL

Variação da corrente em um circuito Resistor-Indutor-Fonte

Através da leis de Kirchoff é possível mostrar que a queda de tensão nos componentes é expressa por:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad \frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

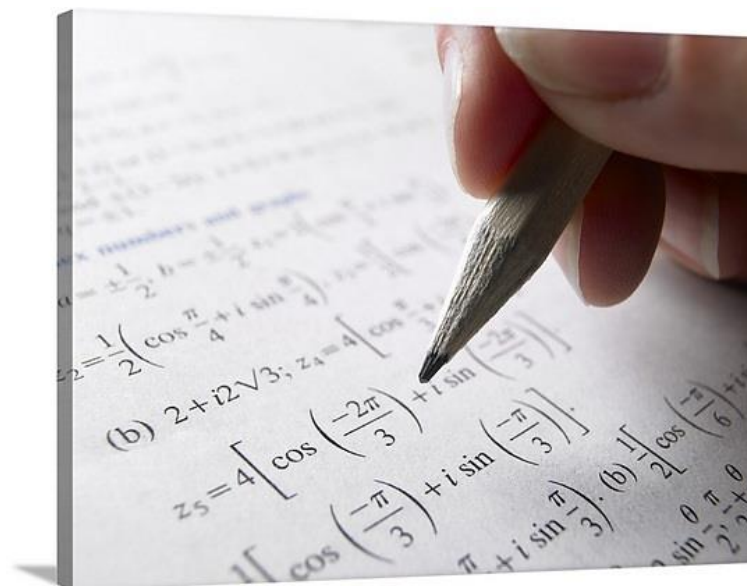
Sendo $I(0) = 0$ e $E(t)=E_0$, empregue seus conhecimentos sobre equações diferenciais e encontre uma expressão que determine a corrente I em função do tempo.





Lista de exercícios

Lista 3 (Exercício 4 em diante).





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.