



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Aula 16

Equações diferenciais parciais

Prof. Diogo Lôndero da Silva



Plano

1. Introdução a equações diferenciais parciais
2. Séries de Fourier
3. Método de separação de variáveis
4. Equação do calor
5. Equação da onda



Introdução

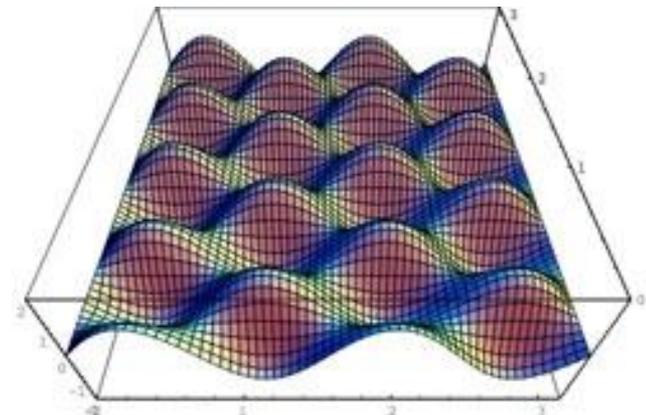
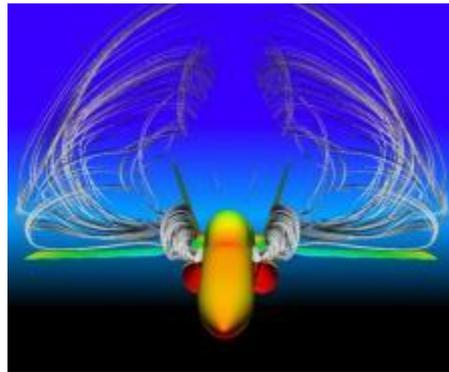
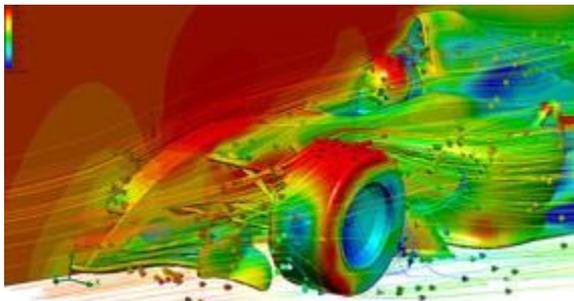


Introdução

Muitas situações práticas presentes na engenharia apresentam **duas ou mais variáveis independentes**, como, por exemplo, o tempo e a posição.

Nestas situações, os **modelos matemáticos** são frequentemente representados por **equações diferenciais parciais**.

Pode-se afirmar que apenas os casos mais simples podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias, enquanto a maior parte dos problemas na área de **mecânica dos sólidos ou fluidos**, **transferência de calor**, teoria **eletromagnética**, mecânica **quântica** e outras áreas da engenharia e física exigem a solução de **equações diferenciais parciais**.



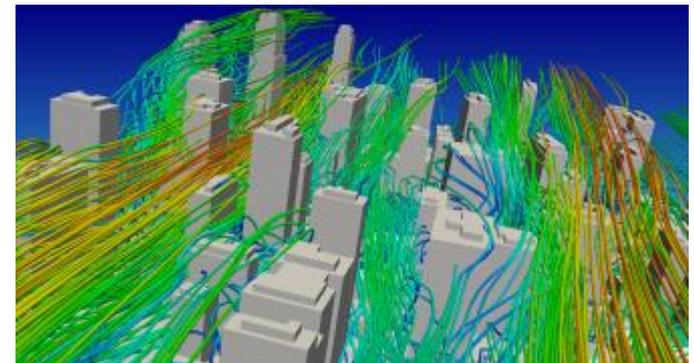
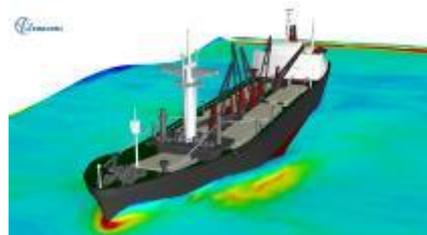
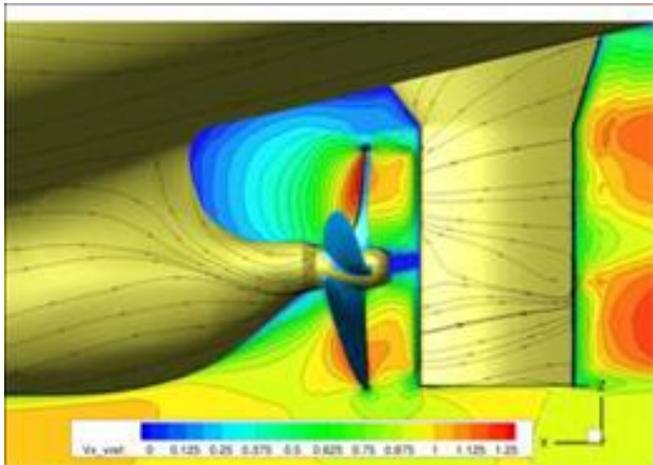


Introdução

A **solução analítica** de tais equações é obtida através da **substituição** da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias.

Desta forma obtém-se uma resposta em forma de uma série infinita, em geral, formada por soluções das equações diferenciais ordinárias.

Em muitos casos vamos lidar com **séries trigonométricas**, que apresentam senos e cossenos, de modo que a primeira parte deste assunto trata de uma discussão de tais séries, conhecidas como **séries de Fourier**.





Introdução

Uma equação que apresentem uma ou mais **derivadas parciais** de uma função que apresenta **duas ou mais variáveis independentes** é definida como uma **equação diferencial parcial**.

Tais equações são ditas **lineares** quando forem de primeira ordem em suas variáveis dependentes e suas derivadas.

Tais equações são **homogêneas** quando todos seus termos apresentam as variáveis dependentes e suas derivadas. Caso contrário são não **homogêneas**



Introdução

Importantes equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem

- (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *One-dimensional wave equation*
- (2) $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *One-dimensional heat equation*
- (3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *Two-dimensional Laplace equation*
- (4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ *Two-dimensional Poisson equation*
- (5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ *Two-dimensional wave equation*
- (6) $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ *Three-dimensional Laplace equation*

Operador de Laplace



Séries de Fourier

Introdução

As Séries de Fourier são séries infinitas que representam funções periódicas em termos de senos e cossenos.

As Séries de Fourier possuem grande importância em Engenharia e Matemática Aplicada, pois pertinem representar **funções periódicas** complicadas em termos de funções periódicas mais simples.

Com isso somos capazes de modelar fenômenos periódicos que aparecem frequentemente na prática, como por exemplo, a vibração de uma corda, o movimento dos planetas ao redor do sol, o movimento de um pêndulo, ondas sonoras, entre outros.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Jean-Baptiste Joseph Fourier



$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$



Séries de Fourier

Função periódica

Antes de definir a Série de Fourier de uma função periódica, precisamos definir precisamente o que é uma função periódica.

Uma função f é dita periódica se existe um número real positivo T , chamado período de f , tal que

$$f(x) = f(x + T)$$

para todo x no domínio de f .

Por exemplo:

As funções

$$\text{sen}(x) \quad \text{e} \quad \text{cos}(x)$$

são funções periódicas de período 2π .

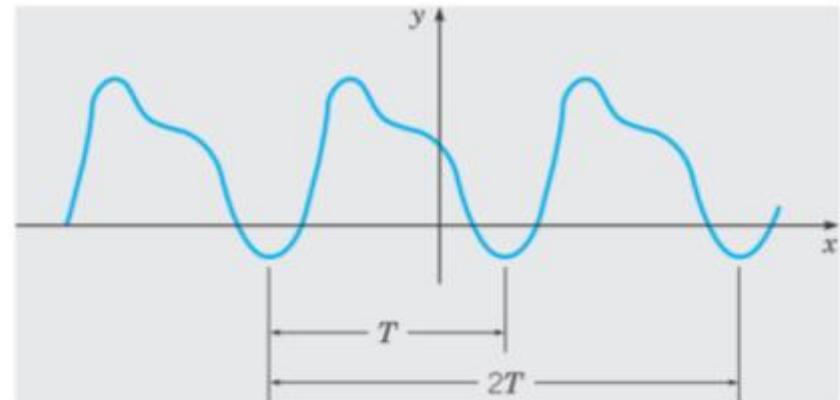


FIGURE 10.2.1 A periodic function.

$$L = T/2$$



Séries de Fourier

Função periódica

Observe que se T é um período de f , então $2T$ também será.

O menor valor de T para o qual $f(x+T) = f(x)$ é válida é chamado de **período fundamental**

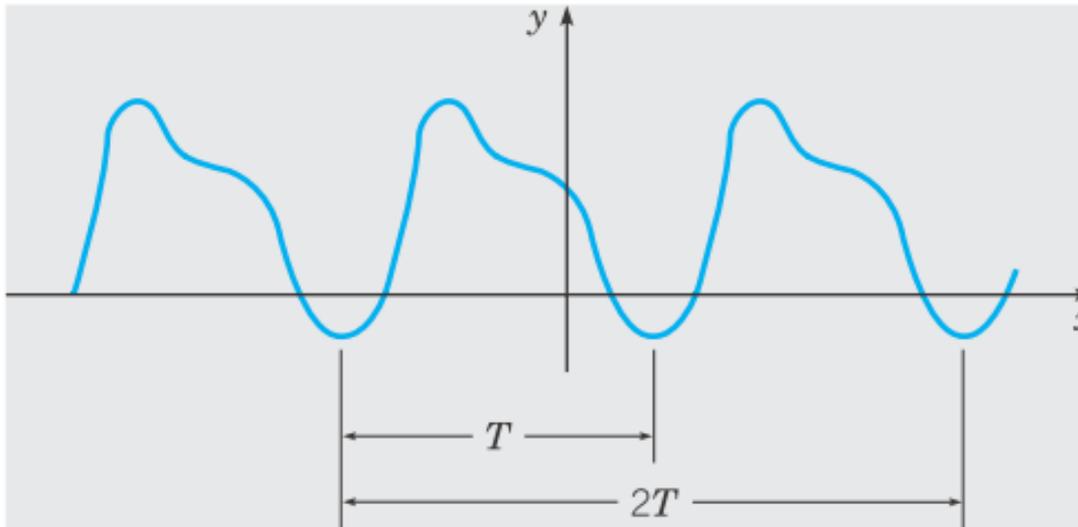


FIGURE 10.2.1 A periodic function.



Séries de Fourier

Função periódica

Se f e g são funções periódicas com período T , então:

- O produto fg será periódico e com período T ;
- A combinação linear $c_1f + c_2g$ será periódico e com período T ;
- A **soma finita ou infinita convergente** de funções de período T também será periódica com período T .

Em particular:

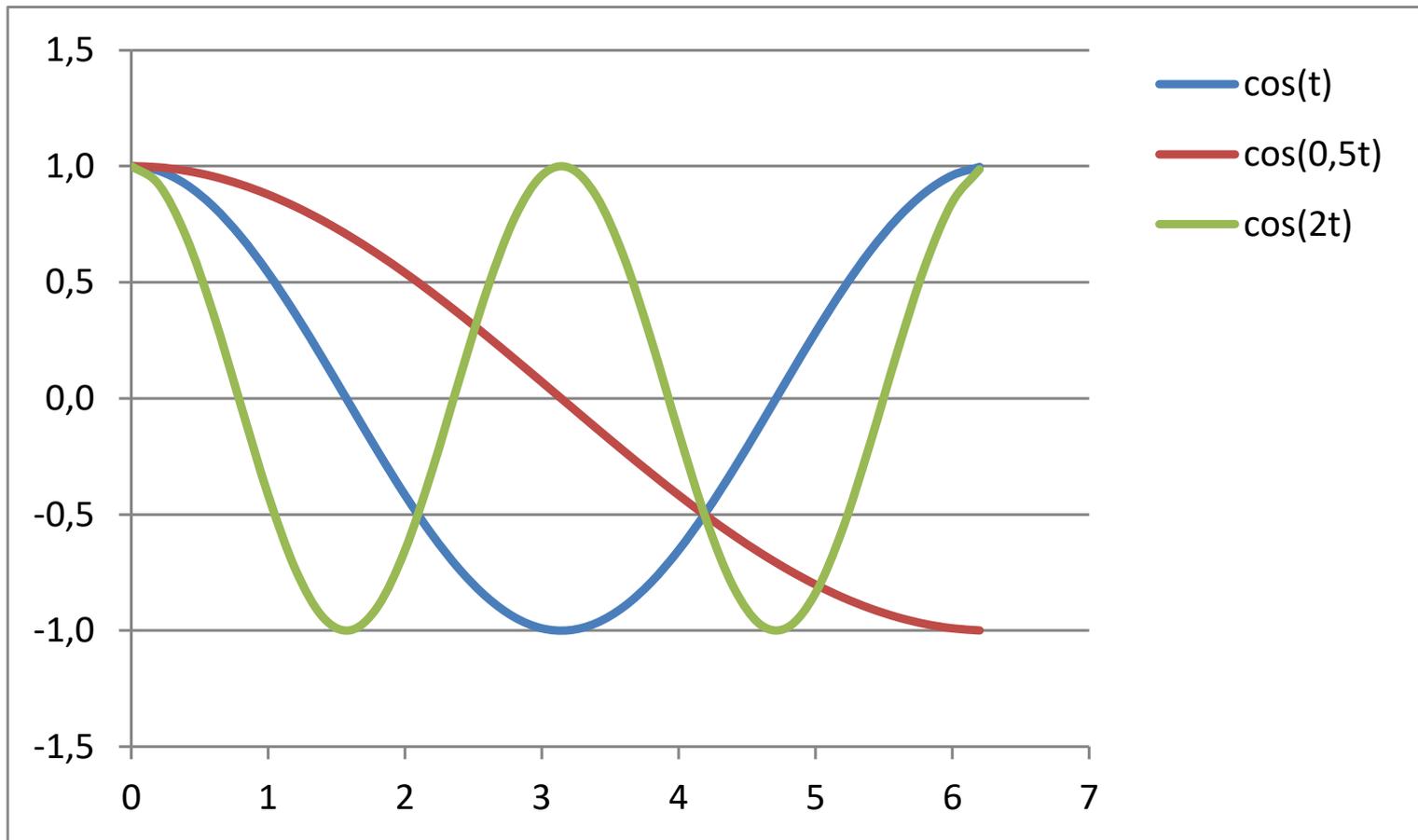
Funções		Período (T)
sen (x)	cos(x)	2π
sen (αx)	cos(αx)	$2\pi/\alpha$
sen ($m\pi x/L$)	cos($m\pi x/L$)	$2L/m$

Neste caso o período fundamental é $T=2L$.



Séries de Fourier

Função periódica (efeito da frequência)





Séries de Fourier - Coeficientes

Ortogonalidade

O produto interno de duas funções u e v intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é definido por

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x) dx.$$

As funções u e v são ditas **ortogonais** no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x) dx = 0.$$

Um conjunto de funções é dito um **conjunto ortogonal** se cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal.



Séries de Fourier

Ortogonalidade

As funções $\sin(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, \dots$, formam um conjunto ortogonal e satisfazem:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n; \end{cases} \quad (6)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{all } m, n; \quad (7)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n. \end{cases} \quad (8)$$



Séries de Fourier

Esses resultados podem ser obtidos por integração direta. Para obter (8) quando $m + n$ e $m - n$ são diferentes de zero.

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(m-n)\pi x/L]}{m-n} - \frac{\sin[(m+n)\pi x/L]}{m+n} \right\} \Bigg|_{-L}^L \\ &= 0\end{aligned}$$

Quando $m - n = 0$,

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 - \cos \frac{2m\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{\sin(2m\pi x/L)}{2m\pi/L} \right\} \Bigg|_{-L}^L \\ &= L.\end{aligned}$$



Séries de Fourier

As fórmulas de Euler-Fourier

Vamos supor que a seguinte série trigonométrica seja **convergente** e sua soma seja $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (9)$$

Através das condições de ortogonalidade apresentadas anteriormente, é possível obter os coeficientes a_m e b_m criando uma relação com $f(x)$.

Multiplicando a eq (9) por **cos (nπx/L)** e integrando de $-L$ a L , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned} \quad (10)$$



Séries de Fourier

As fórmulas de Euler-Fourier

Como n é mantido fixo enquanto m varia devido ao somatório, as relações de ortogonalidade (6) e (7) garantem que o único termos não nulo seja * quando $m=n$

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (10)$$

assim

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = La_n, \quad n = 1, 2, \dots$$



Séries de Fourier

Para obter a_0 integra-se a eq (9) de $-L$ a L , obtendo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= La_0, \end{aligned} \quad (12)$$

Assim, escrevendo o termo constante como $a_0/2$ é possível obter todos os coeficientes a_m por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

De forma semelhante, multiplicando a eq (9) por $\sin(n\pi x/L)$, integrando termo a termo de $-L$ a L obtém-se

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$



Séries de Fourier

As fórmulas de Euler-Fourier

Assim se a série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (9)$$

converge para $f(x)$, seus coeficientes serão:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

$$L = T/2$$



Séries de Fourier

Exemplo

Suponha que exista uma série de Fourier convergindo para uma função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad (15)$$
$$f(x + 4) = f(x).$$

determine os seus coeficientes. A figura abaixo mostra a representação gráfica desta função onde observa-se que o período é $T = 4$, logo $L = 2$.

Onda
triangular

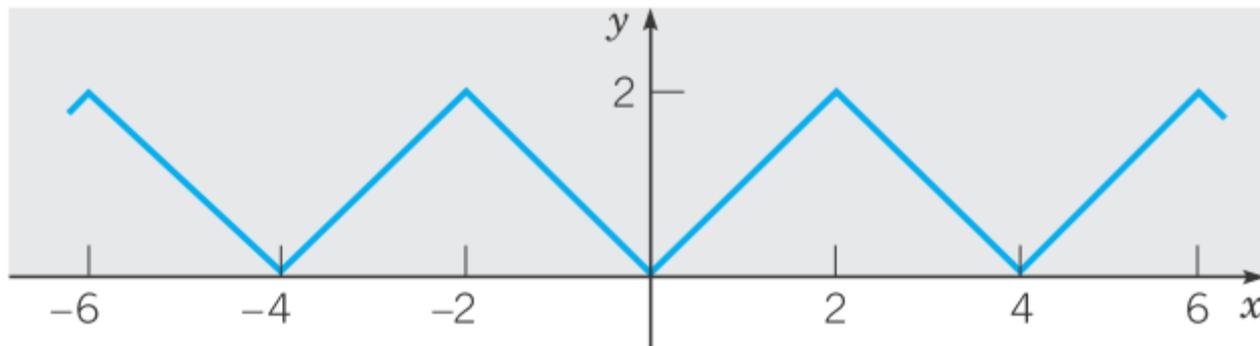


FIGURE 10.2.2 Triangular wave.



Séries de Fourier

Substituindo $f(x)$ na eq (13) com $m = 0$, obtem-se:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1 + 1 = 2.$$

Para $m > 0$, a eq (13) nos dá

$$a_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{m\pi x}{2} dx.$$



Séries de Fourier

Integrando por partes

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{m\pi} x \sin \frac{m\pi x}{2} - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right] \Big|_{-2}^0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{m\pi} x \sin \frac{m\pi x}{2} + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right] \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4}{(m\pi)^2} (\cos m\pi - 1), \quad m = 1, 2, \dots \\ &= \begin{cases} -8/(m\pi)^2, & m \text{ odd,} \\ 0, & m \text{ even.} \end{cases} \end{aligned} \tag{18}$$

E através da eq (14) obtém-se

$$b_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots \tag{19}$$



Séries de Fourier

Substituindo os coeficientes encontrados, obtemos a série de Fourier de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/2)}{m^2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

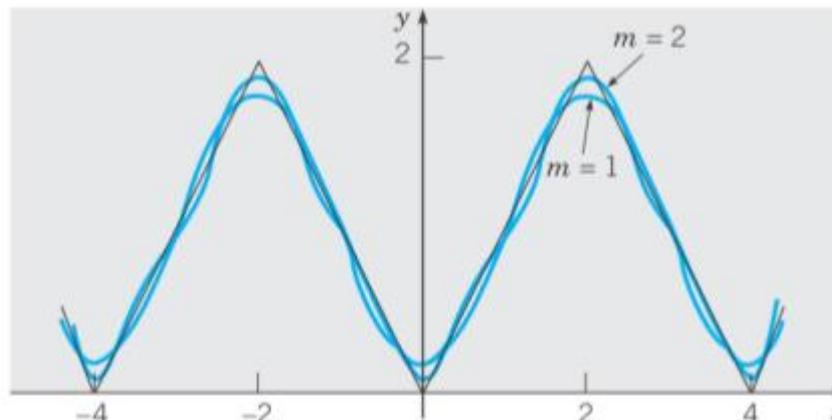


FIGURE 10.2.4 Partial sums in the Fourier series, Eq. (20), for the triangular wave.



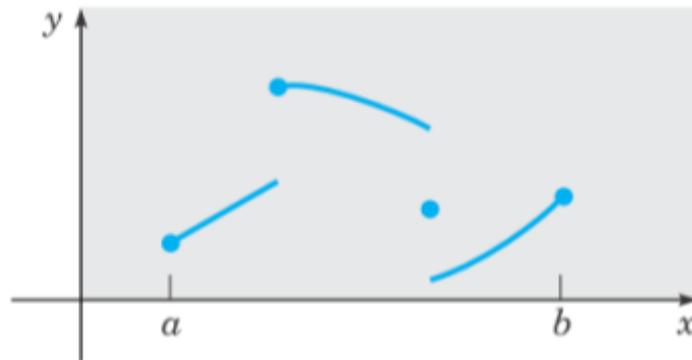
Séries de Fourier

O Teorema de convergência de Fourier

Mesmo que os coeficientes a_n e b_n possam ser encontrados através das equações (13) e (14), **isto não garante a convergência de uma série de Fourier.**

A seguinte definição é necessária para entender o critério de convergência:
Uma função f é dita **seccionalmente convergente** em um intervalo $[a, b]$ se:

1. f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$
2. f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas do interior do intervalo





Séries de Fourier

O Teorema de convergência de Fourier

Definição: Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$. Suponha também que f está definida fora do intervalo $-L \leq x \leq L$ de modo a ser periódica com período $2L$. Então f tem uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (9)$$

Cujos coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua e converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos onde f é descontínua.



Séries de Fourier

Exemplo

Suponha que exista uma série de Fourier convergindo para uma função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0, \\ L, & 0 < x < L, \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x + 2L) = f(x)$$

determine os seus coeficientes. A figura abaixo mostra a representação gráfica desta função onde observa-se que o período é $T = 2L$.

Onda
quadrada

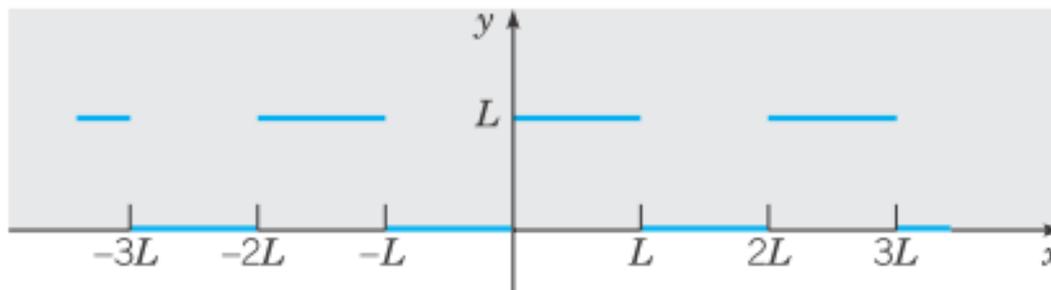


FIGURE 10.3.2 Square wave.



Séries de Fourier

Substituindo $f(x)$ na eq (13) com $m = 0$, obtem-se a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \int_0^L dx = L;$$

Para $m > 0$, a eq (13) nos dá a_m

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= 0, \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Similarmente através da eq (14) obtém-se

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{m\pi} (1 - \cos m\pi) \\ &= \begin{cases} 0, & m \text{ even;} \\ 2L/m\pi, & m \text{ odd.} \end{cases} \end{aligned}$$



Séries de Fourier

A partir dos coeficientes a_0 , a_n e b_n obtém-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/L)}{m} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x/L}{2n-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Que representa a onda quadrada através de uma séries de Fourier.



Séries de Fourier

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/L)}{m} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x/L}{2n-1}. \end{aligned}$$

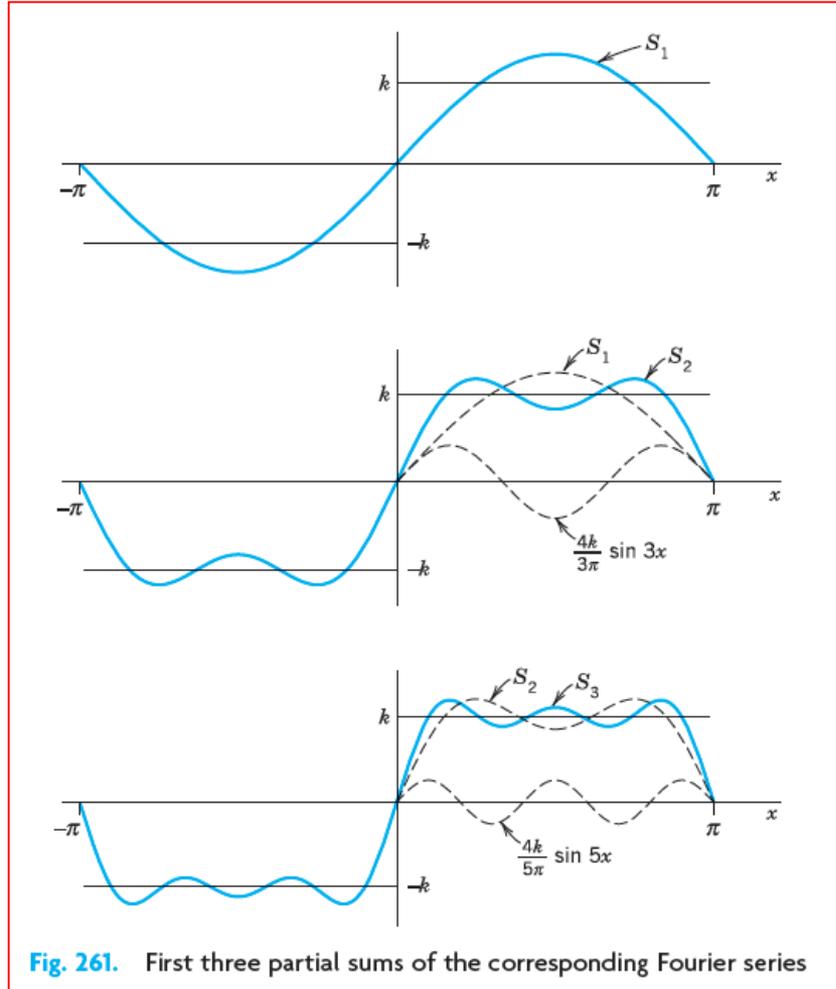


Fig. 261. First three partial sums of the corresponding Fourier series

A representação em série melhora aumentando o número de termos no somatório.



Séries de Fourier

Observe que nos pontos de descontinuidade ($x = 0 \pm nL$) a série de Fourier sempre resulta em $L/2$ (valor médio), que difere de $f(x)$.

Essa figura também sugere que as somas parciais da série de Fourier convergem nas regiões onde $f(x)$ é contínua com o aumento de termos na série.

Nas regiões próximas aos pontos de descontinuidade ($x = 0$ ou $x = nL$) observa-se que a convergência não é suave e que a função tende a dar saltos, como se tivessem dificuldade para se ajustar à mudança brusca que ocorre neste ponto.

Tal fenômeno é conhecido como **fenômeno de Gibbs**.

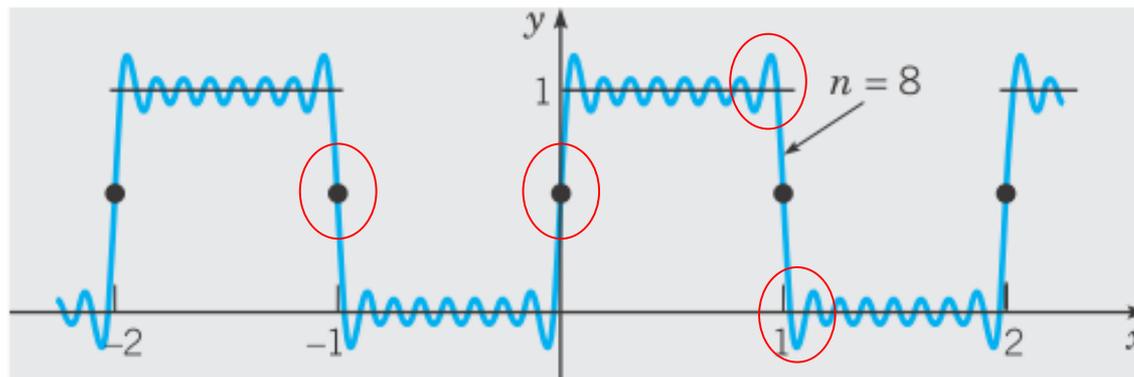
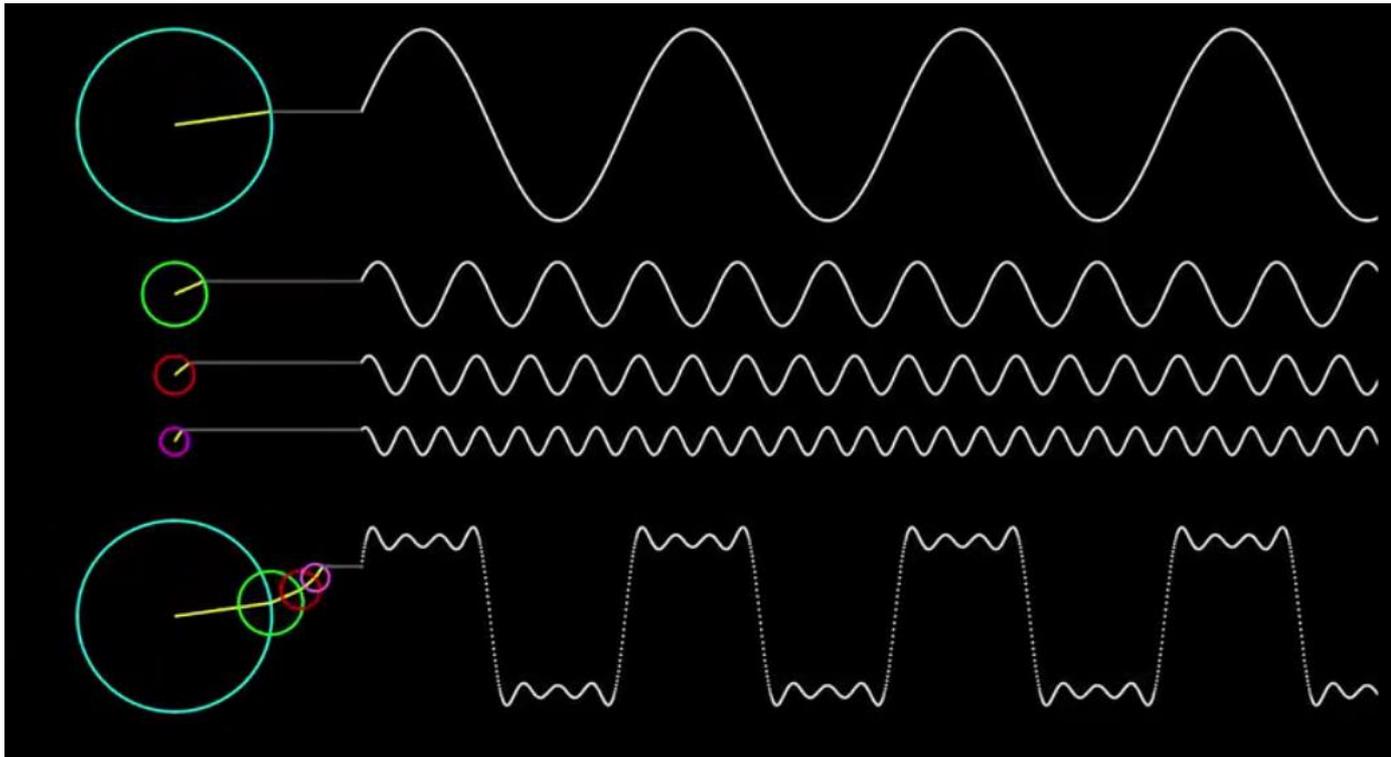


FIGURE 10.3.3 The partial sum $s_8(x)$ in the Fourier series, Eq. (6), for the square wave.



<https://www.youtube.com/watch?v=cUD1gMAI6W4>

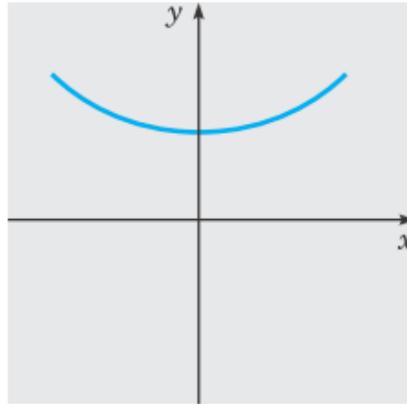


Séries de Fourier

Funções pares e ímpares: caracterizadas pela simetria em relação ao eixo y .

Função par

$$f(-x) = f(x)$$

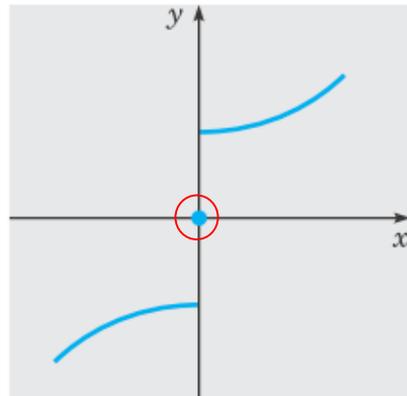


Exemplos:

1, $\cos(nx)$, $|x|$ e x^{2n}

Função ímpar

$$f(-x) = -f(x)$$



Exemplos:

x , x^3 , $\sin(nx)$ e x^{2n+1}

* Toda função ímpar contém o valor zero (0)

A maior parte das funções não é par nem ímpar



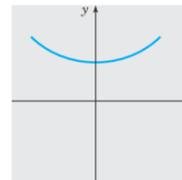
Séries de Fourier

Propriedades elementares

1. A soma (ou diferença) e o produto (ou quociente) de duas funções pares é par.
2. A soma (ou diferença) de duas funções ímpares é ímpar; o produto (ou quociente) de duas funções ímpares é par.
3. A soma (ou diferença) de uma função par e uma função ímpar não é par nem ímpar é ímpar; o produto (ou quociente) delas é ímpar.

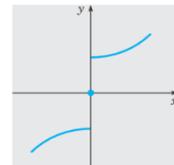
4. Se f é uma função par

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$



5. Se f é uma função ímpar

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$





Séries de Fourier

As fórmulas de Euler-Fourier

Assim se a série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (9)$$

converge para $f(x)$, seus coeficientes serão:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$



Séries de Fourier

Séries em cossenos

Se $f(x)$ for uma **função par**, seccionalmente contínua com período $T = 2L$, as propriedades 1 e 3 transformam os coeficientes das eq (13) e (14) em

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$
$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Logo, a série de Fourier para este tipo de função é expresso por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Portanto, a série de Fourier para qualquer **função par** é formada, apenas, por **cossenos** e o termo **constante**!

Isso ocorre pois $f(x)\cos(n\pi x/L)$ será par e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ será ímpar.



Séries de Fourier

Séries em senos

Se $f(x)$ for uma **função ímpar**, seccionalmente contínua com período $T = 2L$, as propriedades 2 e 4 transformam os coeficientes das eq (13) e (14) em

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Logo, a série de Fourier para este tipo de função é expresso por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Portanto, a série de Fourier para qualquer função ímpar é formada, apenas, por **senos!**

Isso ocorre pois $f(x)\cos(n\pi x/L)$ será ímpar e $f(x)\sin(n\pi x/L)$ será par.

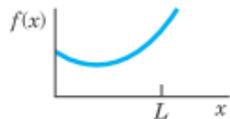


Séries de Fourier

Representação de funções definidas em um intervalo L por séries de Fourier

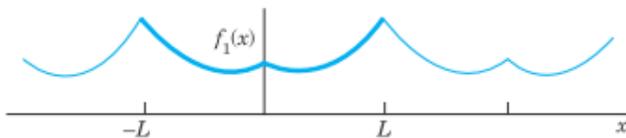
Mesmo **funções que não são periódicas**, definidas em um intervalo $[0, L]$, podem ser representadas por séries de Fourier com período $T = 2L$.

Isto é possível estendendo $f(x)$ como ilustrado nas figuras abaixo



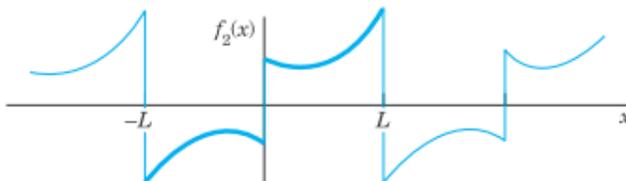
(0) The given function $f(x)$

$f(x)$



(a) $f(x)$ continued as an **even** periodic function of period $2L$

Extensão par de $f(x)$



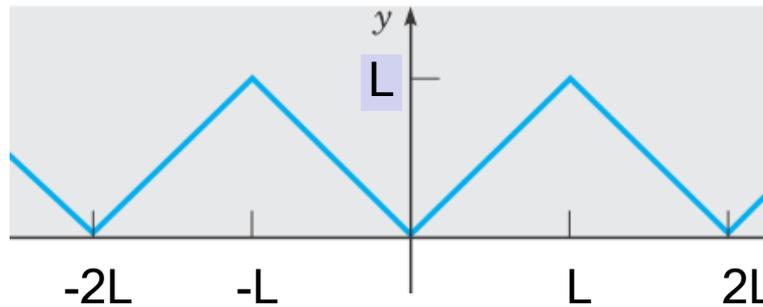
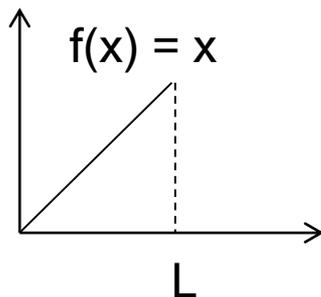
Extensão ímpar de $f(x)$



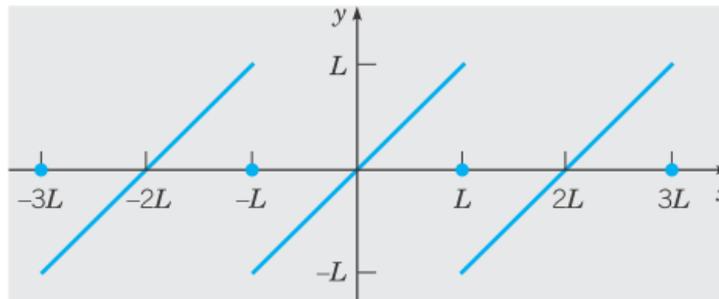
Séries de Fourier

Representação de funções definidas em um intervalo L por séries de Fourier

Exemplo: Se $f(x) = x$ definida em $[0, L]$



Extensão par
(cossenos)



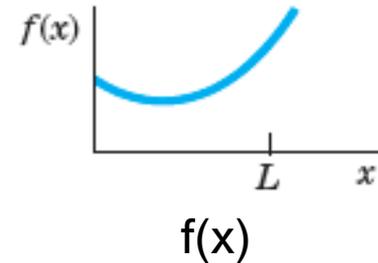
Extensão ímpar
(senos)



Séries de Fourier

Ex: Dada uma função não periódica $f(x)$ definida em $0 \leq x \leq L$

$$f(x) = \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$



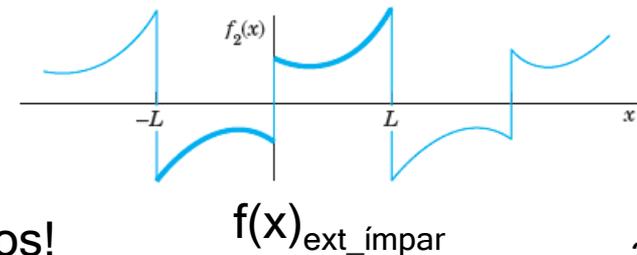
Para obter os coeficientes b_n

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Devo empregar a extensão ímpar de $f(x)$ pois \sin é uma função ímpar. Assim

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)_{\text{ext_impar}}}_{\text{ímpar}} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}_{\text{ímpar}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

ímpar * ímpar = par

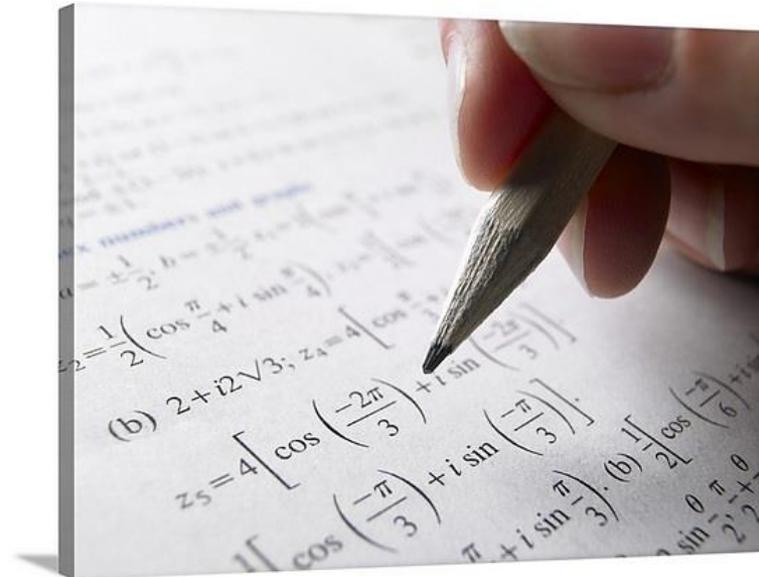


Este é o mesmo resultado obtido para um serie de senos!



Lista de exercícios

Lista 13 - até o exercício 5.





Etapas da solução de equações diferenciais parciais



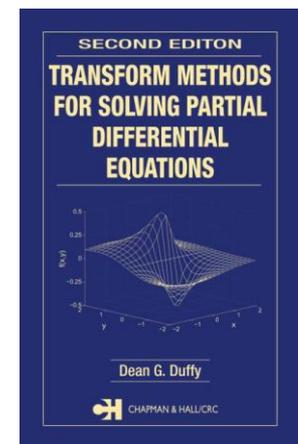
Etapas para solução de EDPs

Separação de variáveis

Primeiro passo: Emprega-se o método de separação de variáveis propondo uma solução que transforma a EDP com n variáveis independentes em n EDOs;

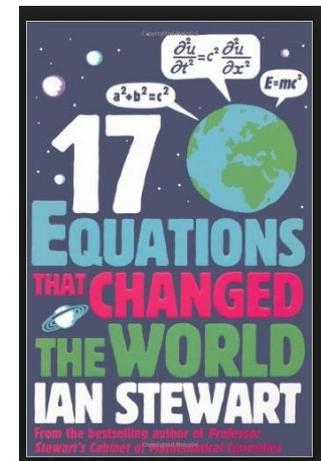
Segundo passo: Emprega-se as condições de contorno para obter os autovalores e autofunções;

Terceiro passo: Usando séries infinitas e o princípio da superposição combina-se as autofunções para obter a solução geral. Os coeficientes da série infinita são obtidos através das condições iniciais ou das condições de contorno ainda não empregadas.





Equação da onda

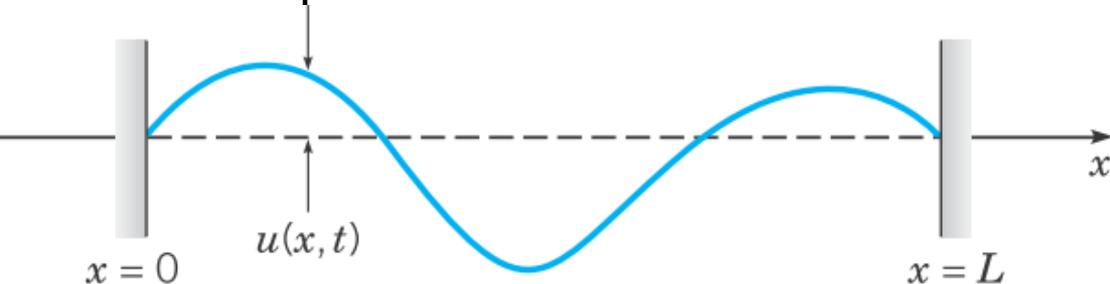




Equação da onda

Equação da onda

Solução pelo método de separação de variáveis aplicado ao movimento de uma corda elástica, como uma corda de guitarra, um arame ou um fio de uma rede elétrica. Neste caso a solução é a função $u(t, x)$, onde u é a posição vertical da corda ao longo do seu comprimento.



Principais Simplificações:

- Sem resistência ao movimento;
- Sem amortecimento;

Balço de forças

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{1D}$$

ρ = densidade linear [kg / m]
 T = tensão [N]

$$a^2 = \frac{T}{\rho}$$



Equação da onda

Solução equação da onda 1D

A distância u da onda em relação ao ponto de repouso para cada posição x e instante de tempo t é expressa por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos(\gamma_n t) + B_n^* \text{sen}(\gamma_n t) \right] \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\pi n}{L}$$

$$f = \frac{\gamma_n}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{n}{2L}$$

Onde os coeficientes são obtidos por

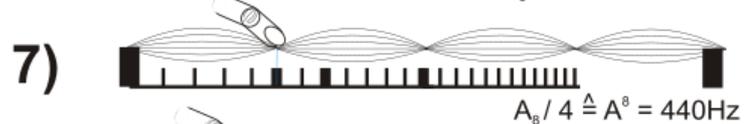
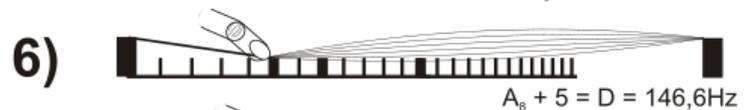
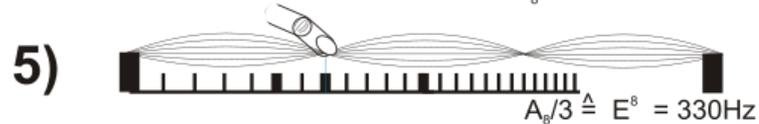
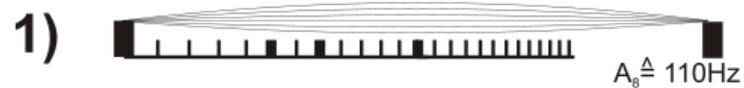
$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

$$B_n^* = \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$$



Equação da onda

Exemplo Equação da onda





Equação da onda

Exemplo Equação da onda 1D

Considere uma corda vibrando com comprimento $L = 30$ que satisfaz a equação da onda unidimensional.

$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0.$$

Assume-se que as extremidades são fixas e que a corda inicia o movimento com velocidade nula a partir da sua posição inicial.

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x/10, & 0 \leq x \leq 10, \\ (30 - x)/20, & 10 < x \leq 30. \end{cases}$$

Encontre o deslocamento da corda descrito por $u(x,t)$ e descreva seu movimento ao longo de um período.



Equação da onda

Exemplo Equação da onda 1D

Como $a = 2$ e $L = 30$, a solução é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{30} \cos \frac{2n\pi t}{30},$$

Com coeficientes

$$c_n = \frac{2}{30} \int_0^{10} \frac{x}{10} \sin \frac{n\pi x}{30} dx + \frac{2}{30} \int_{10}^{30} \frac{30-x}{20} \sin \frac{n\pi x}{30} dx.$$

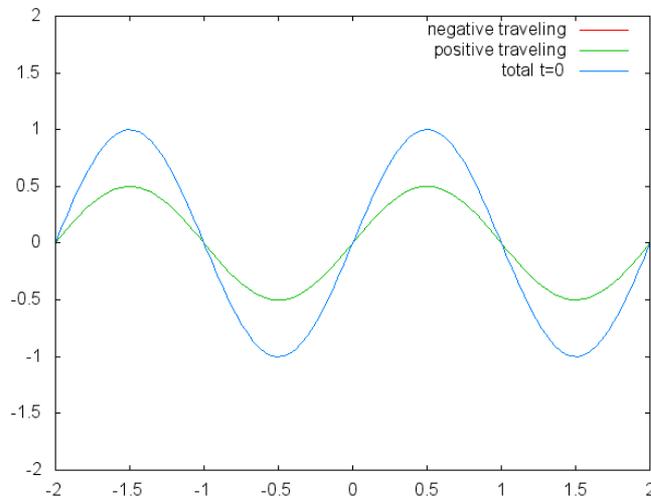
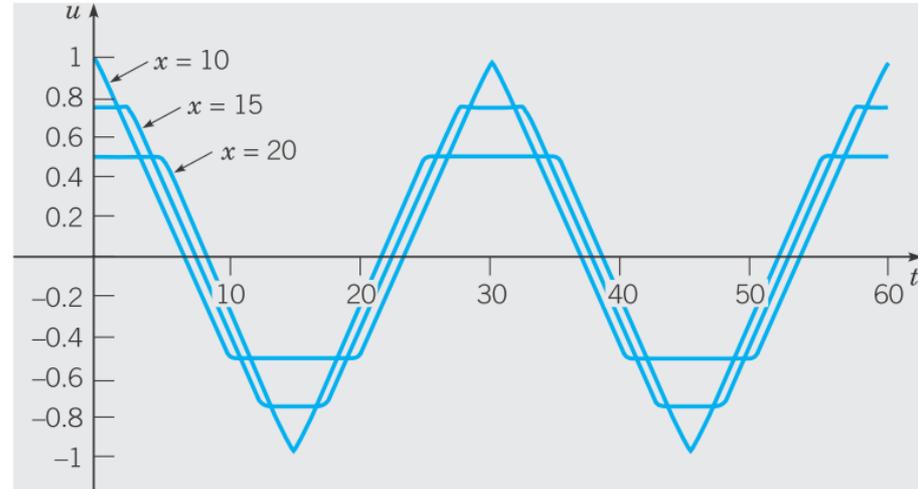
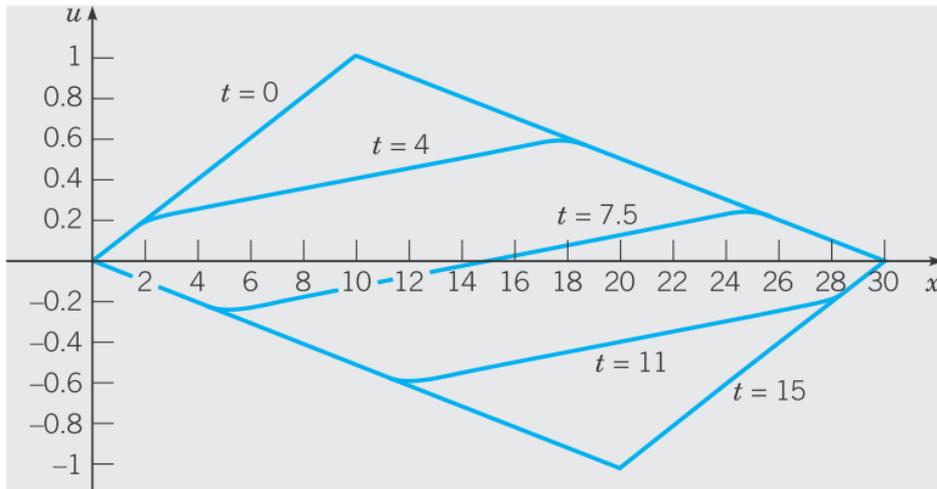
$$c_n = \frac{9}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Estas equações descrevem o movimento da corda $u(t, x)$. Observe que o movimento na corda é periódico, com período $T = 30$, portanto basta analisa-lo no intervalo de tempo $0 < t < 30$.



Equação da onda

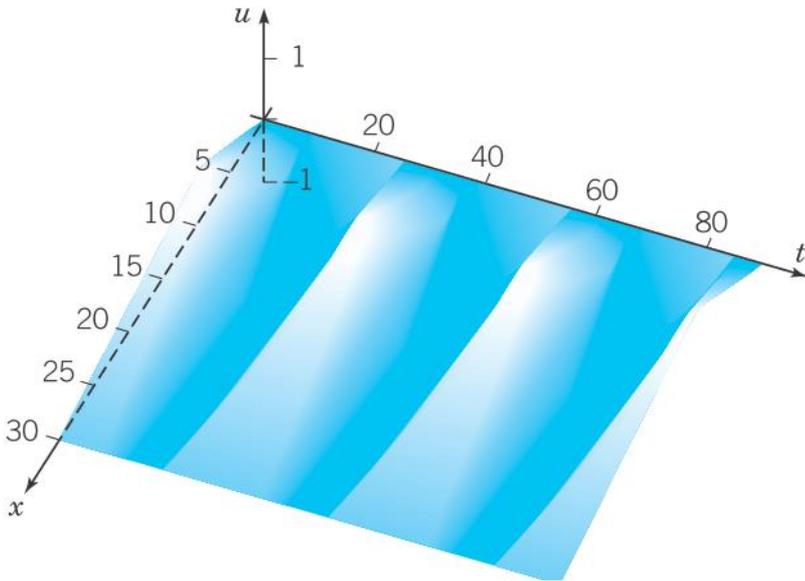
Exemplo Equação da onda 1D





Equação da onda

Exemplo Equação da onda 1D

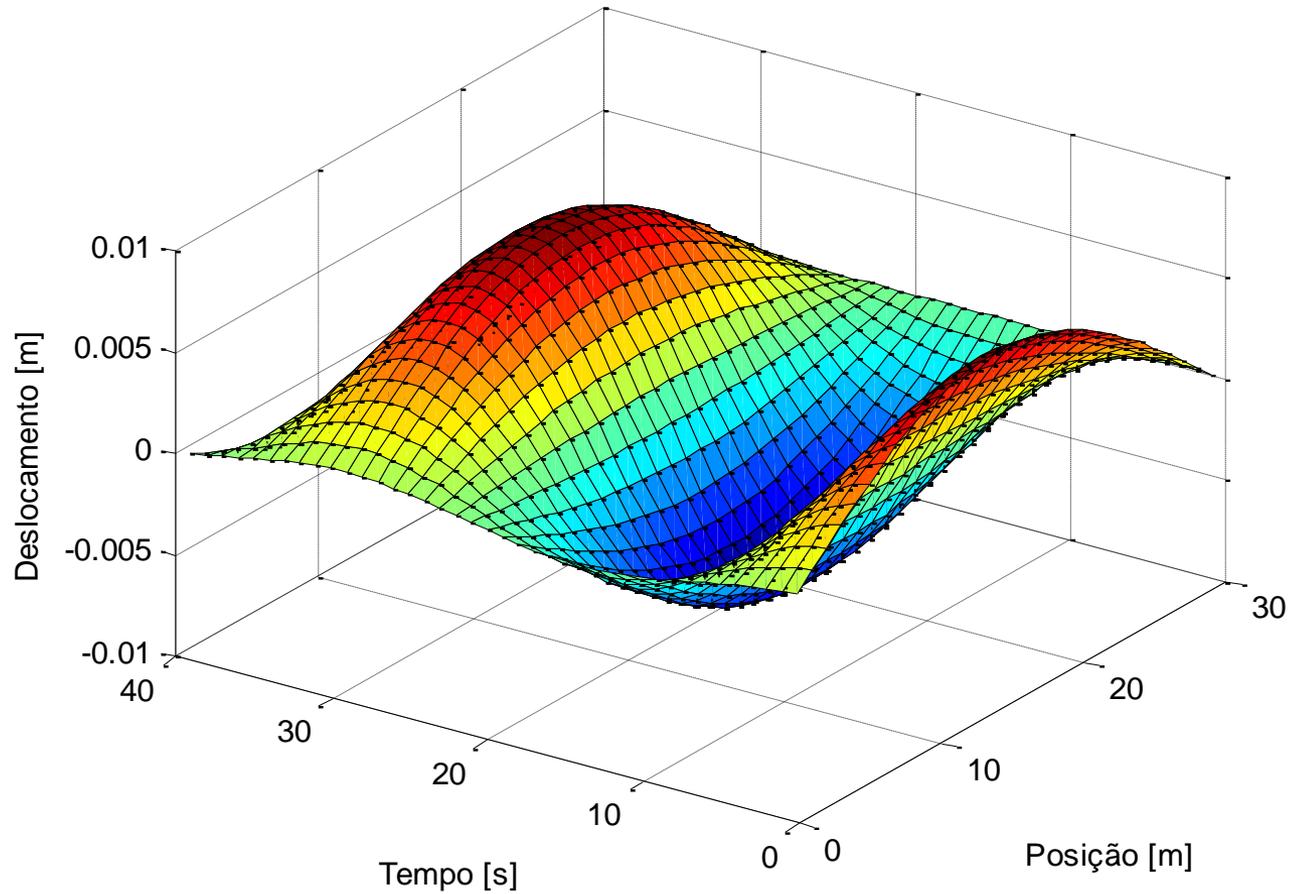


Esta mesma solução se aplica a onda no oceano, ondas acústicas e eletromagnéticas.



Equação da onda

Exemplo Equação da onda 1D





Equação da onda

Equação da onda 2D

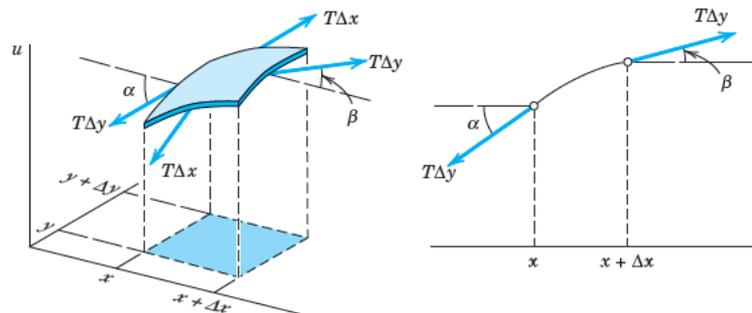
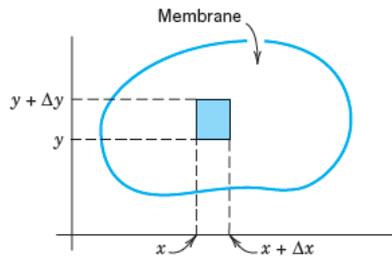


Fig. 301. Vibrating membrane

Aplicando a segunda lei de Newton

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Membrana retangular

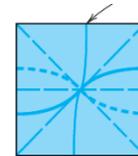
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

Membrana circular



Equação da onda

Equação da onda 2D - Membrana retangular



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$u = 0$ on the boundary

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

Solução: Série de Fourier dupla

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Onde

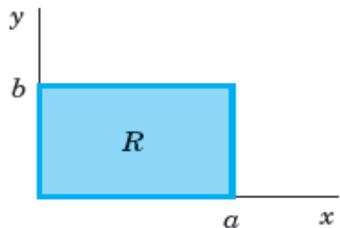
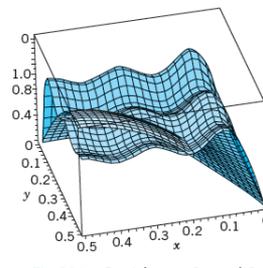
$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

Autovalores

Coeficientes

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$





Equação da onda

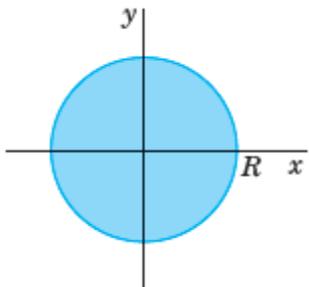
Equação da onda 2D - Membrana circular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$u(R, t) = 0 \text{ for all } t \geq 0$$

$$u(r, 0) = f(r)$$

$$u_t(r, 0) = g(r).$$



Solução: Série de Fourier - Bessel

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos \lambda_m t + B_m \sin \lambda_m t) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right)$$

Onde

Autovalores

$$k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}, \quad \lambda = \lambda_m = ck_m = c\alpha_m/R$$

Coeficientes

$$A_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda_m R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0' \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr$$



Equação da onda

Equação da onda 2D - Membrana circular

A solução é obtida pela sobreposição das autofunções, sendo que as raízes de Bessel definem as linhas nodais (estáticas)

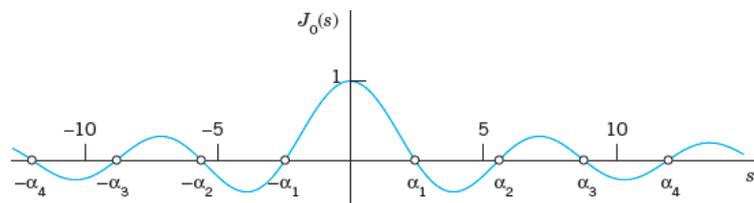


Fig. 308. Bessel function $J_0(s)$

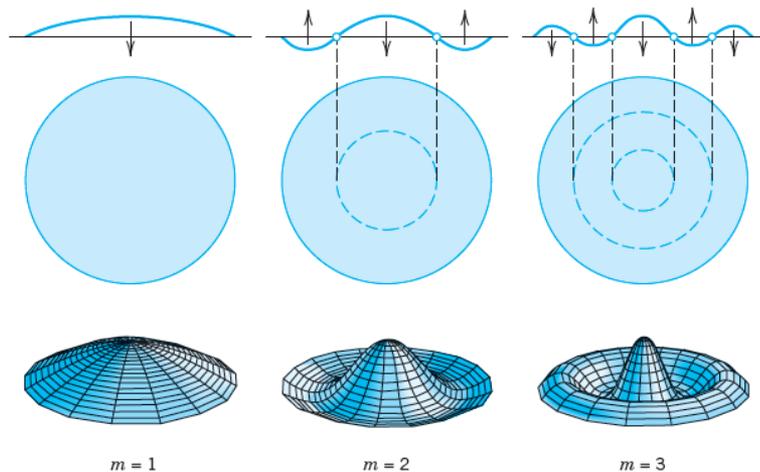
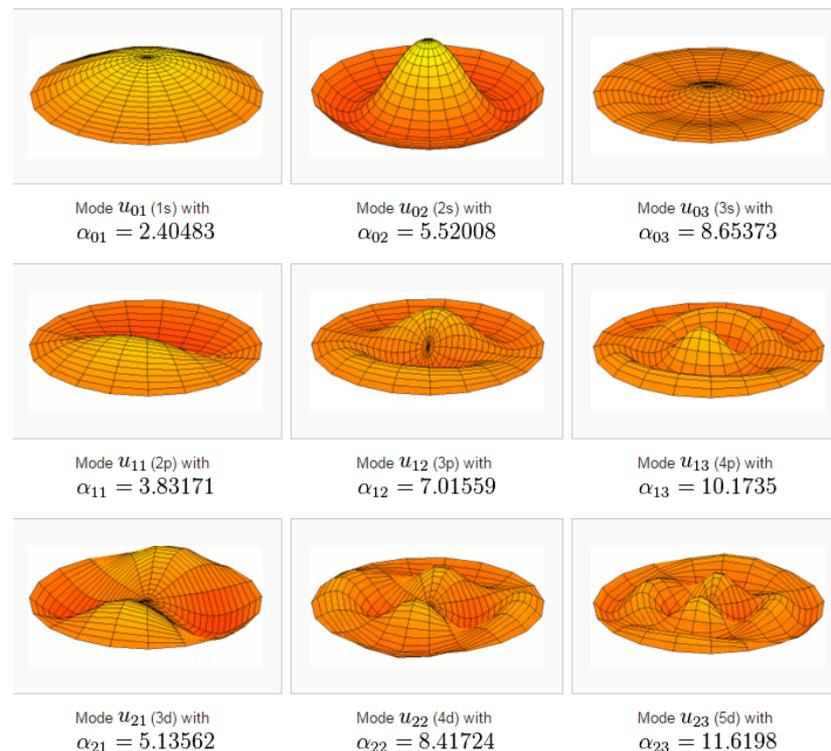
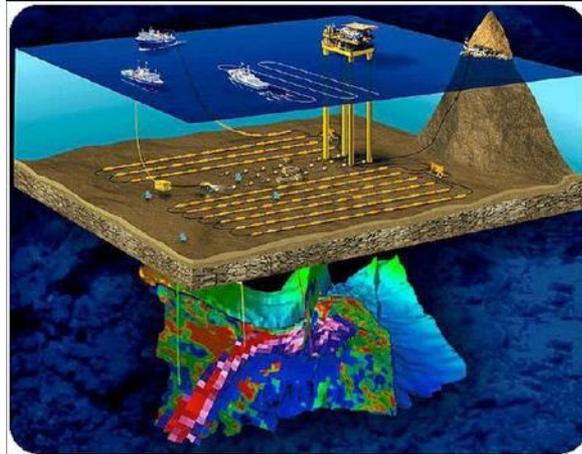
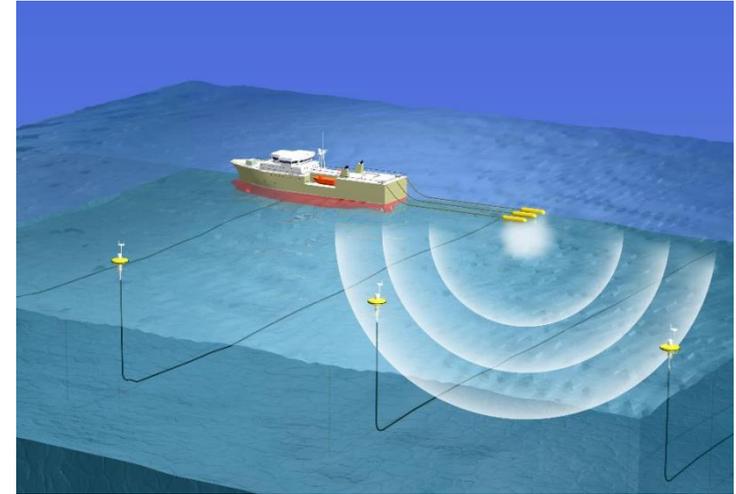
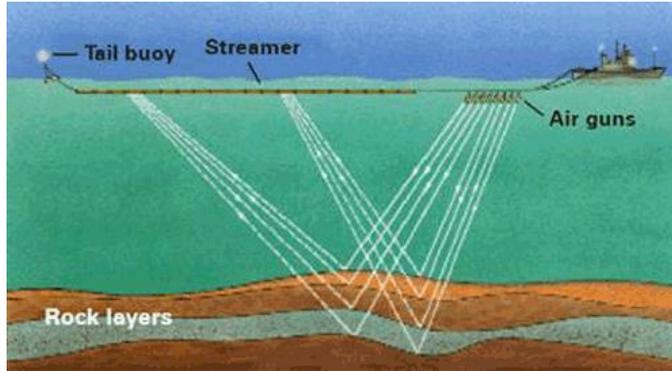
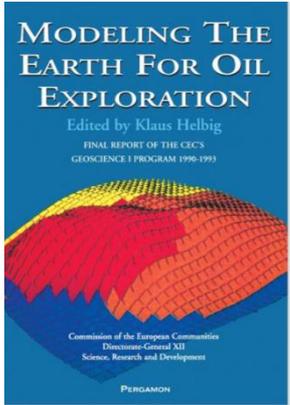


Fig. 309. Normal modes of the circular membrane in the case of vibrations independent of the angle





Equação da onda



A equação da onda pode é resolvida de “trás para frente” na busca de poços de petróleo.



Equação da onda





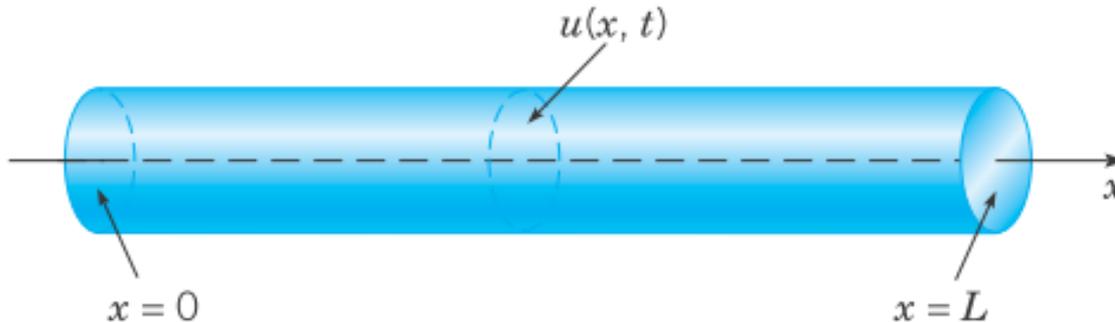
Equação do calor



Equação do calor

Equação do calor

Solução pelo método de separação de variáveis aplicado a condução de calor transiente em uma barra de seção reta uniforme feita de material homogêneo. Neste caso a solução é a função $u(t, x)$, onde u é a temperatura da barra.



Material	α^2 (cm ² /s)
Silver	1.71
Copper	1.14
Aluminum	0.86
Cast iron	0.12
Granite	0.011
Brick	0.0038
Water	0.00144

Balço de energia

$$\rho s \frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho s} \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad 1D$$

ρ = densidade [kg / m³]

s = calor específico [J/kgK]

k = condutividade térmica [W/mK]

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$$

difusividade térmica [m² / s]



Equação do calor

Solução equação do calor 1D

A temperatura u em cada posição x e instante de tempo t é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

Onde os coeficientes c_n são expressos por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$



Equação do calor

Exemplo Equação do calor

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante de tempo em uma barra de metal isolada termicamente com 50 cm de comprimento. As extremidades da barra são mantidas a uma temperatura de 0°C para $t > 0$ s. A temperatura inicial da barra é de 20°C .

A temperatura na barra satisfaz o problema de condução de calor transiente unidimensional, com $L = 50$ e $f(x) = 20$ para $0 < x < 50$. Logo a solução é:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / 2500} \sin \frac{n\pi x}{50},$$

Com coeficientes

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{5} \int_0^{50} \sin \frac{n\pi x}{50} dx \\ &= \frac{40}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 80/n\pi, & n \text{ odd;} \\ 0, & n \text{ even.} \end{cases} \end{aligned}$$



Equação do calor

Exemplo Equação do calor

Substituindo os coeficientes na solução em série, obtém-se

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / 2500} \sin \frac{n\pi x}{50}.$$

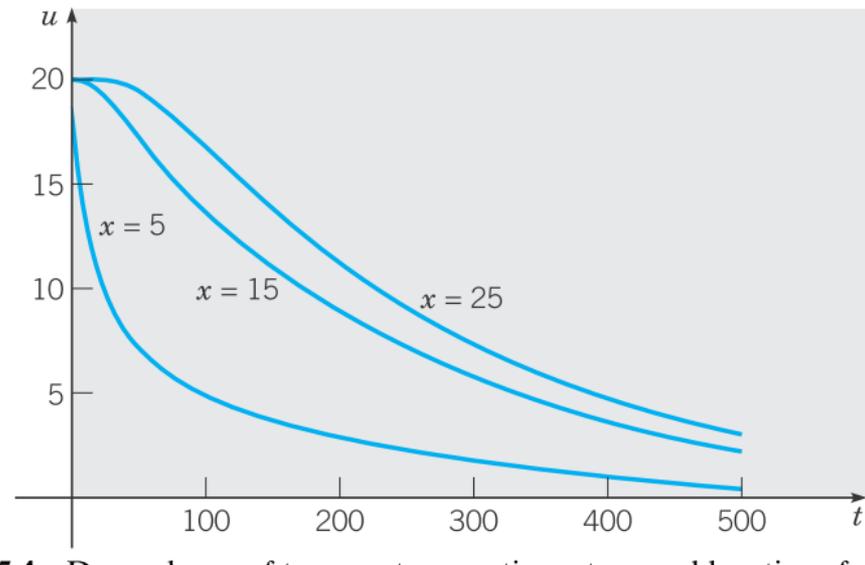
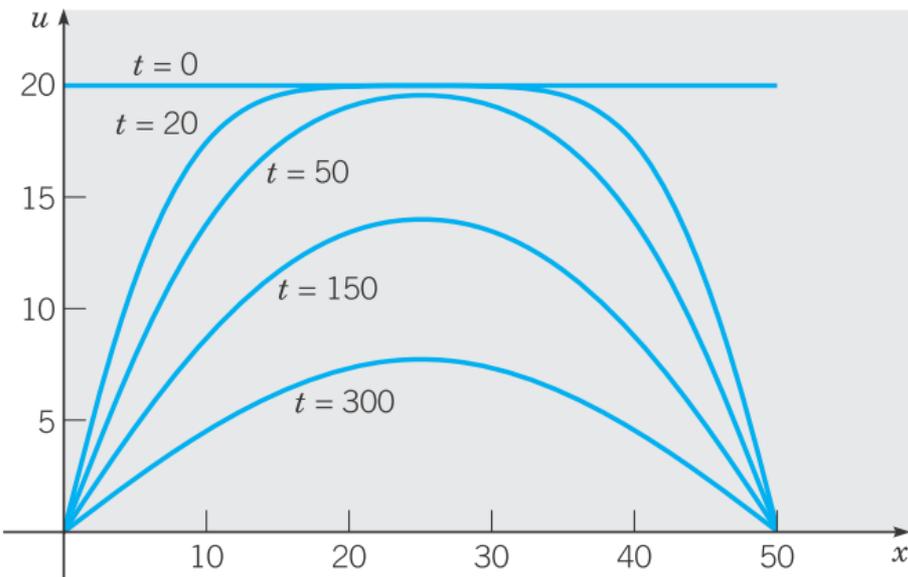
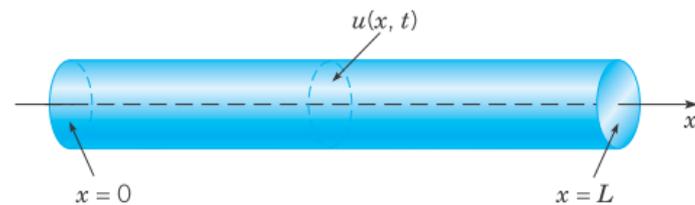
Apesar da aparência complicada, esta série apresenta bons resultados com apenas poucos termos, devido ao exponencial negativo, exceto para pequenos valores de t ou α^2 .

Resultados qualitativos podem ser obtidos empregando $\alpha^2 = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$, que corresponde a um metal com propriedades térmicas entre o cobre e o alumínio. Os gráficos obtidos são apresentados na sequência.



Equação do calor

Exemplo Equação do calor

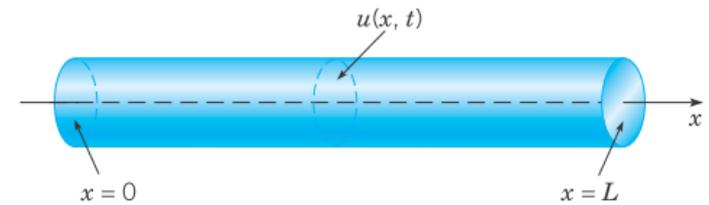
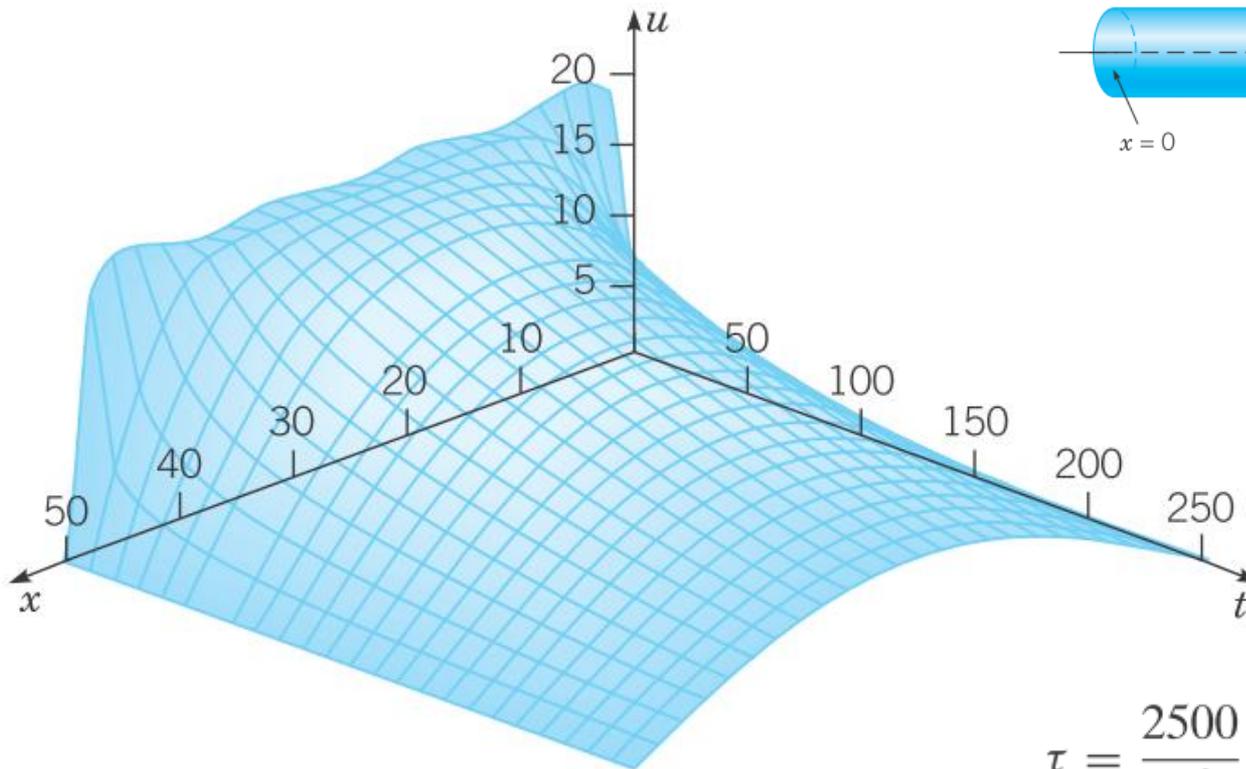


A temperatura da barra diminui devido a transferência de calor apenas pelas extremidades.



Equação do calor

Exemplo Equação do calor



$$\tau = \frac{2500}{\pi^2} \ln(80/\pi) \cong 820 \text{ s.}$$



Equação do calor

Condições de contorno não homogêneas

Nesta situação as temperaturas nas extremidades não são nulas.

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad t > 0.$$

A solução é obtida reduzindo o problema a uma condição com condições de contorno homogêneas. Isto é feito combinando a solução de regime permanente $v(x)$ com a distribuição de temperaturas transiente da seguinte maneira.

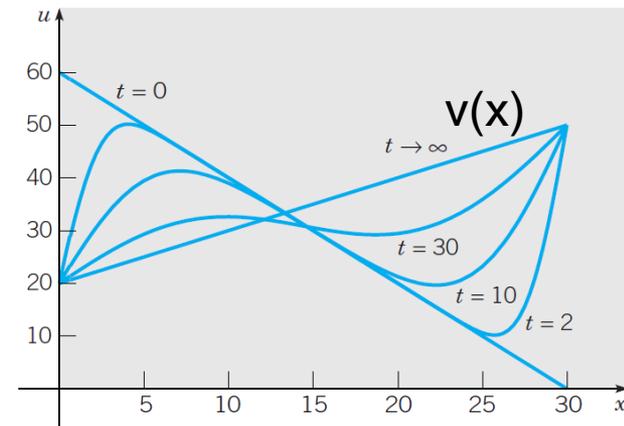
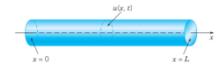
$$u(x, t) = v(x) + w(x, t).$$

Resultando em

$$u(x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L},$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} - T_1 \right] \sin \frac{n \pi x}{L} dx.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Exemplo



Equação de Laplace



Equação de Laplace

Equação de Laplace ou Equação potencial

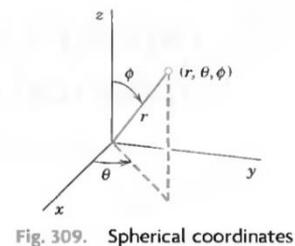
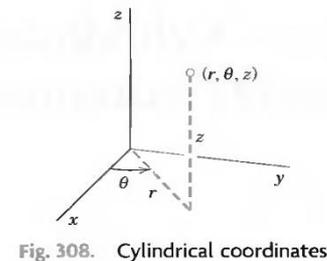
A equação de Laplace ocorre em inúmeras aplicações da engenharia em regime permanente, como por exemplo:

1. Condução de calor;
2. Campos eletrostáticos;
3. Função potencial de uma partícula no espaço sob ação gravitacional;
4. Mecânica dos fluidos;
5. Elasticidade;

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{Retangular}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{Cilíndricas}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad \text{Esféricas}$$





Equação da onda

Solução equação de Laplace 2D

A variável u para cada posição x e y é expressa por:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

Onde os coeficientes são obtidos por

$$c_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b} a\right)} \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy$$



Equação de Laplace

Equação de Laplace ou Equação potencial

O problema para encontrar a solução da equação de Laplace é classificado de acordo com a forma das condições de contorno:

Problema de Dirichlet: as condições de contorno são fornecidas como valores da função u na fronteira;

Ex: $u(0, y) = 0$; $u(a, y) = 3$

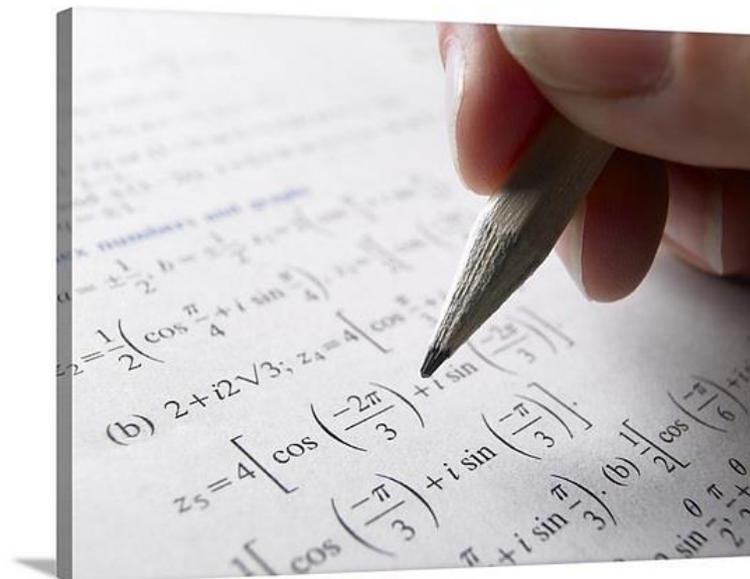
Problema de Neumann: as condições de contorno são fornecidas como derivadas da função u na fronteira;

Ex: $u'(0, y) = 0$; $u'(a, y) = f(y)$



Lista de exercícios

Lista 13.





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; IÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2