



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 11

Soluções de EDOs em séries

Prof. Diogo Lôndero da Silva



Sumário

1. Soluções de equações diferenciais em séries de potências



Soluções em Séries

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES
COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

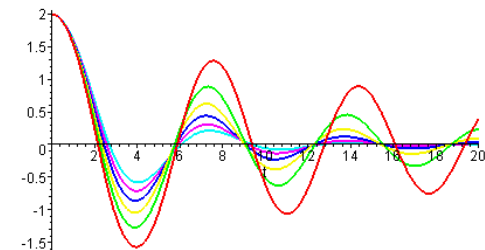


Soluções em séries

Muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas explicitamente em termos de combinações finitas de funções usuais simples. Isso é verdade mesmo para uma equação com aparência bem simples, como

1

$$y'' - 2xy' + y = 0$$



Todavia, é importante poder resolver equações como a que foi dada acima, pois elas surgem de problemas físicos, especialmente em conexão com a equação de Schrödinger na mecânica quântica.

Iremos focar nossa atenção em EDOs lineares, mas que apresentam **coeficientes variáveis** que não podem ser resolvidas pelos métodos vistos até o momento.



Soluções em séries

Em tais casos, vamos usar o método das séries de potência, isto é, procuraremos por uma solução da forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

O método é substituir essa expressão na equação diferencial e determinar os valores dos coeficientes $c_0, c_1, c_2, \dots$. Essa técnica assemelha-se ao método dos coeficientes indeterminados.



Soluções em séries

Antes de usar as séries de potências para resolver a Equação 1, ilustraremos o método com uma equação mais simples, $y'' + y = 0$, no Exemplo 1. Contudo, é mais fácil entender o método das séries de potências quando ele é aplicado a essa equação mais simples.



Soluções em séries

Exemplo 1

Use séries de potências para resolver a equação

$$y'' + y = 0. \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

SOLUÇÃO: Vamos supor que haja uma solução da forma

$$2 \quad y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Podemos derivar a série de potências termo a termo.
Assim

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$



Soluções em séries

Exemplo 1 – Solução

continuação

$$3 \quad y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

A fim de compararmos as expressões de y e y'' mais facilmente, reescrevemos y'' como segue:

$$4 \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

Substituindo as expressões nas Equações 2 e 4 na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

As potências de x devem ser ajustadas para que x^n fique em evidência!



Soluções em séries

Exemplo 1 – Solução

continuação

ou

$$\boxed{5} \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n]x^n = 0$$

Se duas séries de potências são iguais, então os coeficientes correspondentes devem ser iguais. Portanto, os coeficientes de x^n na Equação 5 devem ser 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

$$\boxed{6} \quad c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

◦



Exemplo 1 – Solução

continuação

A Equação 6 é chamada *relação de recorrência*. Se c_0 e c_1 forem conhecidos, essa equação nos permite determinar os coeficientes restantes recursivamente, usando $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ em sucessão.

Usando $n = 0$:

$$c_2 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2}$$

Usando $n = 1$:

$$c_3 = -\frac{c_1}{2 \cdot 3}$$

Usando $n = 2$:

$$c_4 = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!}$$



Soluções em séries

Exemplo 1 – Solução

continuação

Usando $n = 3$:

$$c_5 = -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!}$$

Usando $n = 4$:

$$c_6 = -\frac{c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{4! \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!}$$

Usando $n = 5$:

$$c_7 = -\frac{c_5}{6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{5! \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{7!}$$



Soluções em séries

Exemplo 1 – Solução

continuação

Agora, já percebemos o seguinte padrão:

Para os coeficientes pares, $c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$

Para os coeficientes ímpares, $c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}$

Colocando esses valores na Equação 2, escrevemos a solução como

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \dots$$



Soluções em séries

Exemplo 1 – Solução

continuação

$$\begin{aligned} &= c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right) \\ &\quad + c_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right) \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Observe que há duas constantes arbitrárias, c_0 e c_1 .



Soluções em séries

OBSERVAÇÃO 1 Reconhecemos as séries obtidas no Exemplo 1 como as séries de Maclaurin para $\cos x$ e $\sin x$. Portanto, podemos escrever a solução como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

Entretanto, em geral não somos capazes de expressar soluções das equações diferenciais em séries de potências em termos de funções conhecidas.



Soluções em séries

Obtenção de c_0 e c_1 a partir das C.I.s

Como assumimos uma solução do tipo

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 +$$

Podemos obter as constantes c_0 e c_1 avaliando y e y' em $x=0$, assim:

$$c_0 = y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad c_1 = y'(0) = y'_0$$

Obs: Em problemas de mais alta ordem, empregamos o mesmo raciocínio.



Soluções em séries

Observe que

$$c_0 = y(0)$$

$$c_1 = y'(0)$$

Portanto, as únicas duas constantes necessárias são obtidas através das condições iniciais.

Neste exemplo, obtemos

$$c_0 = y(0) = 0$$

$$c_1 = y'(0) = 1$$



Soluções em séries

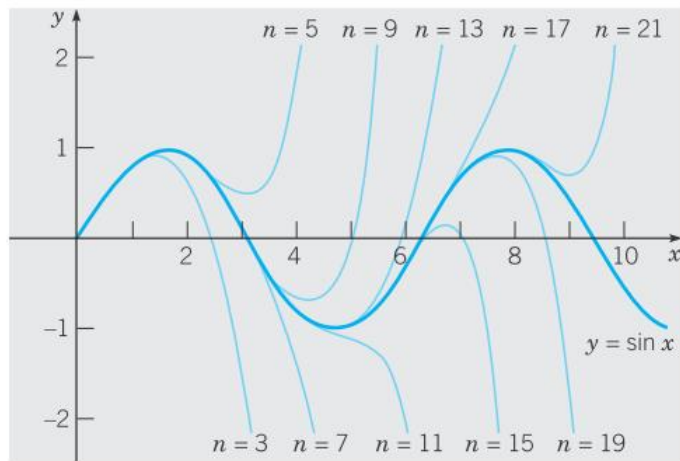


FIGURE 5.2.2 Polynomial approximations to $\sin x$. The value of n is the degree of the approximating polynomial.

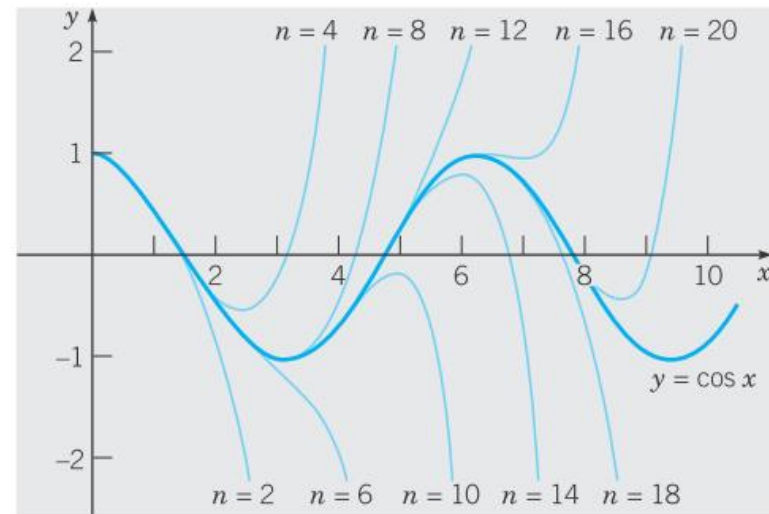


FIGURE 5.2.1 Polynomial approximations to $\cos x$. The value of n is the degree of the approximating polynomial.

Uma solução em série fornece apenas uma aproximação local (neste caso $a=0$).

Quanto mais afastado de a , mais termos são necessários.



Soluções em séries

TEOREMA: Raio de convergência de uma solução em série.

Se x_0 é um ponto ordinário (analítico) de uma equação diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

então, as séries infinitas na solução geral da equação diferencial tem raio de convergência que é, no mínimo, tão grande quanto o menor dos raios de convergência das funções $P(x)$ e $Q(x)$.

Portanto, a solução em séries converge onde $P(x)$ e $Q(x)$ forem analíticas.



Soluções em séries

Exemplo 2

Resolva $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUÇÃO: Vamos supor que haja uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Então

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$E \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

como no Exemplo 1.



Exemplo 2 – Solução

continuação

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0$$

Usando $n = 0$: $c_2 = \frac{-1}{1 \cdot 2} c_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n]x^n = 0$$



Soluções em séries

Exemplo 2 – Solução

continuação

Essa equação estará satisfeita se o coeficiente de x^n for 0:

$$(n + 2)(n + 1)c_{n+2} - (2n - 1)c_n = 0$$

7

$$c_{n+2} = \frac{2n - 1}{(n + 1)(n + 2)} c_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Resolvemos essa relação de recursão usando
 $n = 1, 2, 3, \dots$ sucessivamente na Equação 7:



Soluções em séries

Exemplo 2 – Solução

continuação

Usando $n = 1$:
$$c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} c_1$$

Usando $n = 2$:
$$c_4 = \frac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\frac{3}{4!} c_0$$

Usando $n = 3$:
$$c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$$

Usando $n = 4$:
$$c_6 = \frac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{3 \cdot 7}{4! \cdot 5 \cdot 6} c_0 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} c_0$$



Exemplo 2 – Solução

continuação

Usando $n = 5$:
$$c_7 = \frac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5! \cdot 6 \cdot 7} c_1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$$

Usando $n = 6$:
$$c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$$

Usando $n = 7$:
$$c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$$



Soluções em séries

Exemplo 2 – Solução

continuação

Em geral, os coeficientes pares são dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} c_0$$

e os coeficientes ímpares são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} c_1$$

A solução é

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$



Soluções em séries

Exemplo 2 – Solução

continuação

$$= c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{3}{4!} x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!} x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} x^8 - \dots \right) \\ + c_1 \left(x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!} x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} x^9 + \dots \right)$$

ou

8

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n} \right) \\ + c_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1} \right)$$



Soluções em séries

OBSERVAÇÃO 2 No Exemplo 2, *supusemos* que a equação diferencial tivesse uma solução em série. Mas agora podemos verificar diretamente que a função dada pela Equação 8 é de fato uma solução.

OBSERVAÇÃO 3 Ao contrário da situação do Exemplo 1, as séries de potências que surgem na solução do Exemplo 2 não definem funções elementares.



Soluções em séries

As funções

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}$$

e

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

são perfeitamente boas, entretanto não podem ser expressas em termos de funções familiares. Podemos usar essas expressões em série de potência de y_1 e y_2 para calcular os valores aproximados das funções e até mesmo seus gráficos.

2



Soluções em séries

A Figura 1 mostra as primeiras somas parciais $T_0, T_2, T_4, \dots$ (polinômios de Taylor) para $y_1(x)$, e vemos como eles convergem para y_1 .

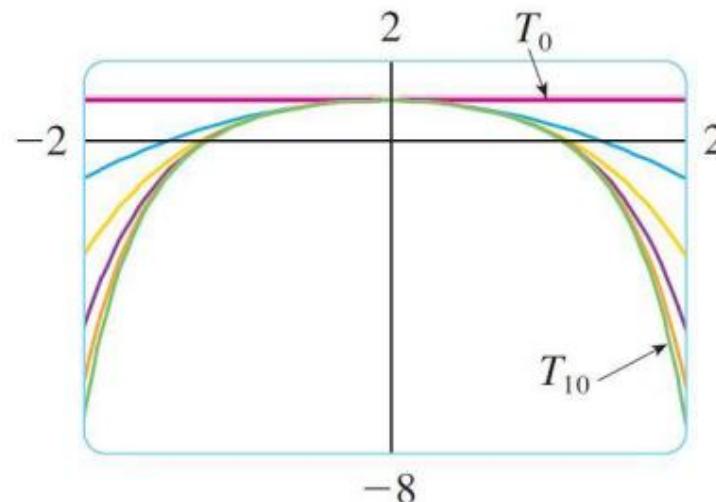


Figura 1



Soluções em séries

Dessa maneira, podemos fazer ambos os gráficos de y_1 e y_2 na Figura 2.

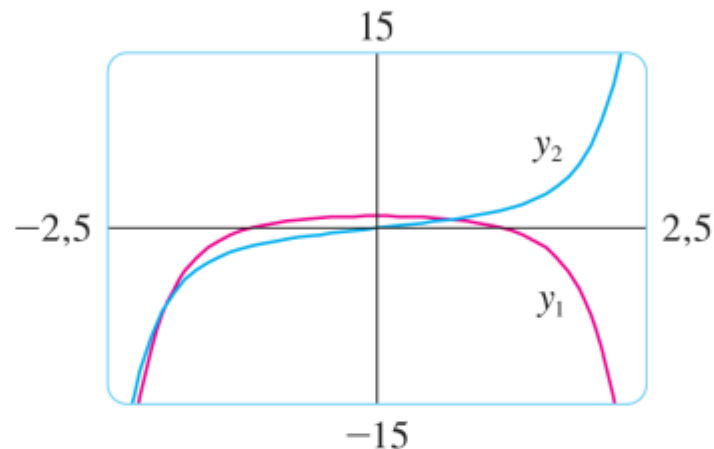


Figura 2

OBSERVAÇÃO 4 Se nos pedirem para resolver o problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$



Soluções em séries

devemos observar, do Teorema, que

$$c_0 = y(0) = 0 \quad c_1 = y'(0) = 1$$

Isso simplificaria os cálculos no Exemplo 2, uma vez que todos os coeficientes pares seriam 0. A solução para o problema de valor inicial é

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}$$



Equação de Legendre

Equação de Bessel

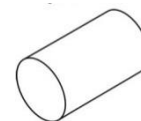


Soluções em séries

As duas equações

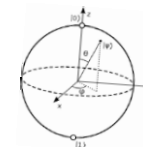
$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Bessel



$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Legendre



Ocorrem frequentemente em estudos avançados de matemática aplicada, física e engenharia. Elas são chamadas de equação de Bessel e equação de Legendre, respectivamente.

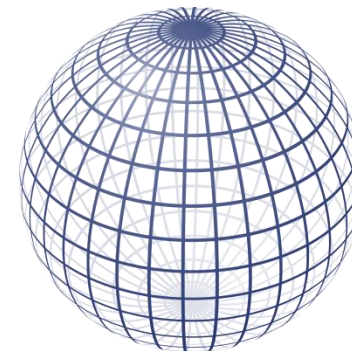
Estas duas equações podem ser resolvidas com o emprego de séries de potências.



Equação de Legendre

A equação de Legendre

$$\boxed{1} \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$



é uma das mais importantes da física, e surge em muitos problemas que apresentam geometria esférica.

A variável n é uma constante, que depende do problema físico ou de engenharia em questão.

Toda solução desta equação é denominada de função de Legendre.



Equação de Legendre

Dividindo a equação 1 por $(1-x^2)$ e empregando $k=n(n+1)$ obtêm-se

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)} y' + \frac{n(n+1)}{(1-x^2)} y = 0$$

Substituindo

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad \boxed{2}$$

E suas derivadas em 1 obtêm-se

$$(1-x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0.$$

Escrevendo a primeira expressão como duas séries

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m = 0.$$



Equação de Legendre

Para obter um termo comum x^s em todas as séries, emprega-se a substituição $m-2=s$, resultando em:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_sx^s - \sum_{s=1}^{\infty} 2sa_sx^s + \sum_{s=0}^{\infty} ka_sx^s = 0.$$

Para que a igualdade seja atendida, todos os coeficientes das séries devem ser nulos.

O termo x^0 , que aparece apenas no primeiro e último somatório, da origem a:

$$(3a) \quad 2 \cdot 1a_2 + n(n+1)a_0 = 0.$$

O termo x^1 , que aparece no primeiro, terceiro e quarto somatório, da origem a:

$$(3b) \quad 3 \cdot 2a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0.$$



Equação de Legendre

O termos de mais alta ordem, x^2 , x^3 , ... dos demais somatórios, originam:

$$(3c) \quad (s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0.$$

Resolvendo 3a para a_2 , 3b para a_3 e 3c para a_{s+2} obtêm-se:

$$(4) \quad a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)} a_s \quad (s = 0, 1, \dots).$$

Que é chamada de fórmula de recorrência. Assim

$$\begin{array}{l|l} a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0 & a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1 \\ a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3} a_2 & a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4} a_3 \\ = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0 & = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1 \end{array}$$



Equação de Legendre

Substituindo estas expressões dos coeficientes em 2, obtêm-se:

$$(5) \quad y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

Onde

$$(6) \quad y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \dots$$

$$(7) \quad y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \dots$$

Estas duas soluções em séries convergem em $|x| < 1$.



Equação de Legendre

Soluções em polinômios. Polinômios de Legendre $P_n(x)$.

A redução da solução em série para uma solução em polinômios é muito vantajosa pois permite a solução para qualquer x .

Na equação de Legendre isto ocorre quando n é um inteiro positivo, pois o lado direito da equação 4 se torna nulo para $s=n$.

Portanto, se n for par $y_1(x)$ se reduz a um polinômio de grau n . Se n for ímpar o mesmo ocorre para $y_2(x)$. Nos dois casos, as outras duas soluções são séries infinitas que podem ser escritas como polinômios multiplicados por $\ln[(1+x)/(1-x)]$

Estes polinômios multiplicados por algum constante são denominados de **polinômios de Legendre** e denotados por $P_n(x)$.

$$(4) \quad a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)} a_s \quad (s = 0, 1, \dots).$$



Equação de Legendre

Exemplo

Função de Legendre para $n=0$

Quando $n=0$, a equação 6 resulta em $y_1(x)=1$, e a equação 7 resulta em

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{(-3)(-1) \cdot 2 \cdot 4}{5!}x^5 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Assim, a solução é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

$$y(x) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)$$



Equação de Legendre

A escolha do valor das constantes é realizada da seguinte forma:

O coeficiente da a_n da maior potencia x^n é definido como

$$(8) \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \quad (n \text{ a positive integer})$$

Onde $a_n=1$ se $n=0$. A partir da equação 4 obtêm-se

$$(9) \quad a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \quad (s \leq n-2).$$



Equação de Legendre

A partir de 9 com $s=n-2$ e 8 obtêm-se:

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

Que pode ser simplificada a

$$a_{n-2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)! (n-2)!}.$$



Equação de Legendre

De forma similar

$$\begin{aligned}a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2! (n-2)! (n-4)!}\end{aligned}$$

E, quando $n-2m \geq 0$

(10)

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!}.$$

Observe que n é o grau do polinômio e m é o índice do somatório.



Equação de Legendre

A solução obtida para a equação diferencial de Legendre (1) é conhecida como Polinômio de Legendre de grau n , sendo denotada por $P_n(x)$.

$$(11) \quad \begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1! (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Onde $M = n/2$ (quando n for par) ou $(n-1)/2$ (se n for ímpar), seja qual deles for um inteiro.

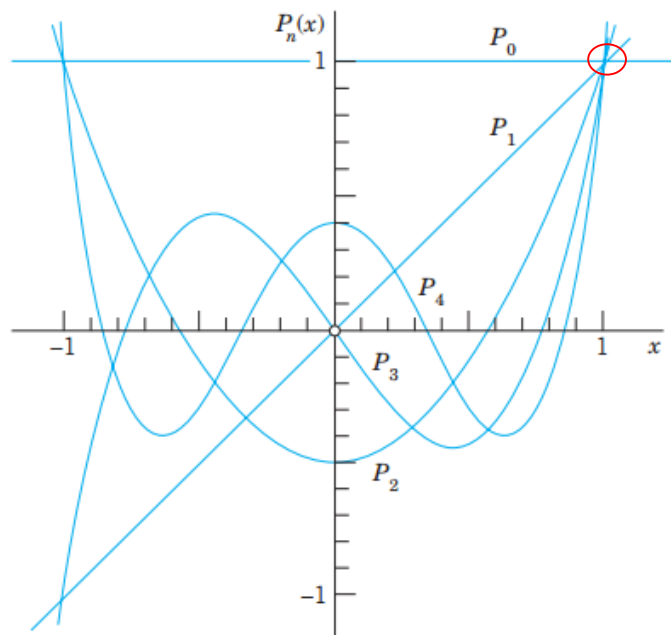


Equação de Legendre

Os primeiros polinômios de Legendre são

$$(11') \quad \begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

and so on. You may now program (11) on your CAS and calculate $P_n(x)$ as needed.



São ortogonais

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{if } n \neq m.$$





Equação de Legendre

Lembre-se que $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... São soluções particulares para as equações diferenciais

$$\begin{aligned} n=0, & \quad (1-x^2)y'' - 2xy' = 0 \\ n=1, & \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ n=2, & \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \end{aligned}$$

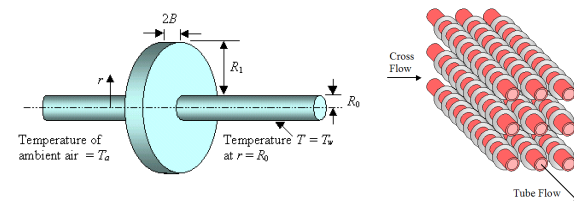
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$



Equação de Bessel

A equação de Bessel, na qual ν é um número real positivo surge em problemas de vibrações, campos elétricos, condução de calor, escoamento de fluidos, etc. Na maioria dos casos envolvendo geometrias que apresentam simetria cilíndrica.

$$1 \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$



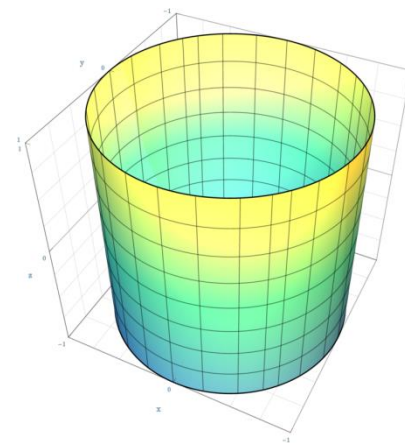
De acordo com a teoria de Frobenius, esta equação apresenta solução da forma.

(2)

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

Substituindo 2 e suas derivadas em 1 obtêm-se

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0. \end{aligned}$$





Equação de Bessel

Ajustando os somatórios e igualando a soma dos coeficientes de x^{s+r} a zero. Verifique que as potências de x^{s+r} correspondem a $m=s$ na primeira, segunda e quarta série e a $m=s-2$ na terceira série. Portanto, para $s=0$ e $s=1$ a terceira série não apresenta termos se $m \geq 0$. Para $s=2, 3, \dots$ Todas as séries apresentam termos, permitindo a obtenção de

$$(a) \quad r(r-1)a_0 + ra_0 - v^2a_0 = 0 \quad (s=0)$$

$$(3) \quad (b) \quad (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - v^2a_1 = 0 \quad (s=1)$$

$$(c) \quad (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - v^2a_s = 0 \quad (s=2, 3, \dots).$$

A partir de 3a obtêm-se a equação indicial para r .

$$(4) \quad (r+v)(r-v) = 0.$$

Cujas raízes são $r_1=v$ e $r_2=-v$. Cada uma destas raízes gera uma solução em série.



Equação de Bessel

Coeficientes recursivos para $r=r_1=v$

Para $r = v$ 3b se reduz a $(2v+1)a_1=0$. Portanto, $a_1=0$ pois $v \geq 0$.
Substituindo $r = v$ em 3c obtêm-se.

$$(5) \quad (s + 2v)sa_s + a_{s-2} = 0.$$

Como $a_1=0$ e $v \geq 0$, 5 leva a $a_3=a_5=a_7=\dots=0$. De forma que restem apenas os coeficientes a_s com índice pares $s=2m$. Assim a equação 5 torna-se:

$$(6) \quad a_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(v+m)} a_{2m-2}, \quad m = 1, 2, \dots$$



Equação de Bessel

Coeficientes recursivos para $r=r_1=v$

Através de 6 determina-se $a_2, a_4, \dots$, sucessivamente

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(v+2)} = \frac{a_0}{2^4 2! (v+1)(v+2)}$$

and so on, and in general

$$(7) \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (v+1)(v+2) \cdots (v+m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$



Equação de Bessel

Coeficientes recursivos para $r = r_1 = \nu$

É uma prática padrão escolher para a_0 um valor específico, a saber

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)}$$

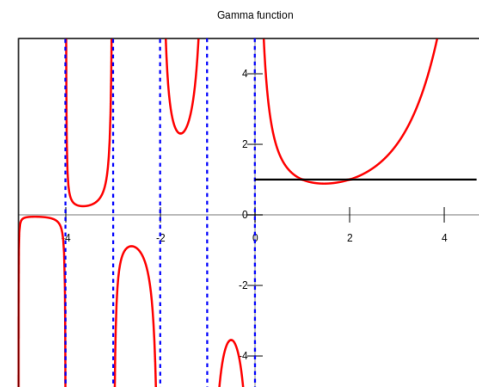
Se n for inteiro
 $\Gamma(n + 1) = n!$

Onde Γ é a função Gamma* expressa por

$$\Gamma(\nu + 1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu dt = \nu \Gamma(\nu) \quad (\nu > -1).$$

Desta forma é possível reescrever 7 como

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}.$$



Função Gamma

* A função Gamma é tabelada ou pode ser calculada em SCAs.



Equação de Bessel

Coeficientes recursivos para $r = r_1 = \nu$

Assim, obtêm-se uma das soluções para equação de Bessel, que é expressa por

$$J_{\nu}(x) = x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

8

Coeficientes recursivos para $r = r_2 = -\nu$

Empregando o expoente $r_2 = -\nu$, obtemos , exatamente da mesma maneira

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m - \nu + 1)}.$$

9



Equação de Bessel

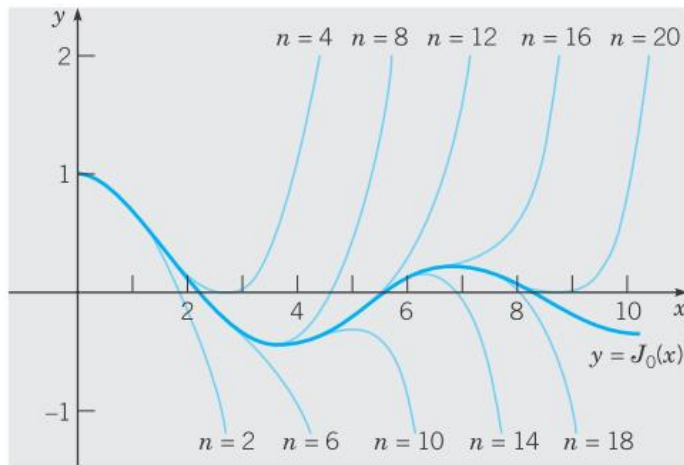


FIGURE 5.7.1 Polynomial approximations to $J_0(x)$. The value of n is the degree of the approximating polynomial.

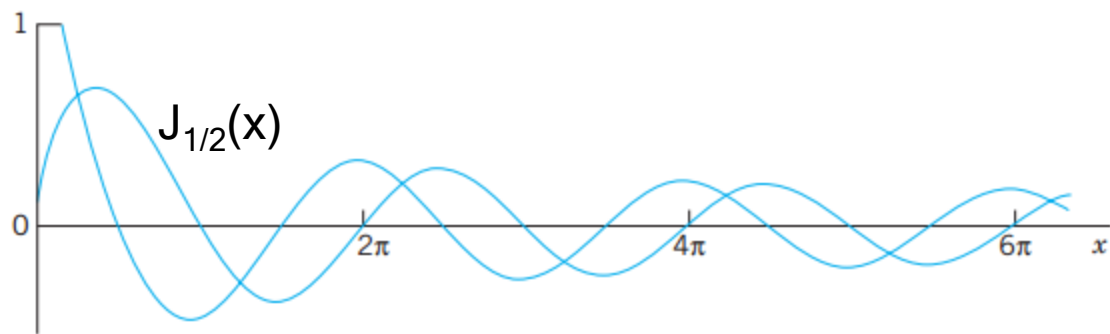


Fig. 111. Bessel functions $J_{1/2}$ and $J_{-1/2}$



Equação de Bessel

Agora, devemos ter cuidado ao escrever a solução geral para 1. Quando $\nu = 0$, é óbvio que (8) e (9) são iguais. E também pode ser demonstrado através da teoria de Frobenius que existirão duas soluções linearmente independentes sempre que ν não for um número inteiro.

Assim, a solução geral para (1) em $(0, \infty)$ é:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \quad \nu \neq \text{inteiro}$$



Equação de Bessel

Funções de Bessel de segunda espécie

Quando ν for um inteiro ou qualquer outro número positivo, a solução geral para 1 em $(0, \infty)$ pode ser escrita como

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

10

Onde $Y_\nu(x)$ é algumas vezes chamada de função de Neumann ou função de Bessel de segunda ordem, sendo expressa por

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

9



Equação de Bessel

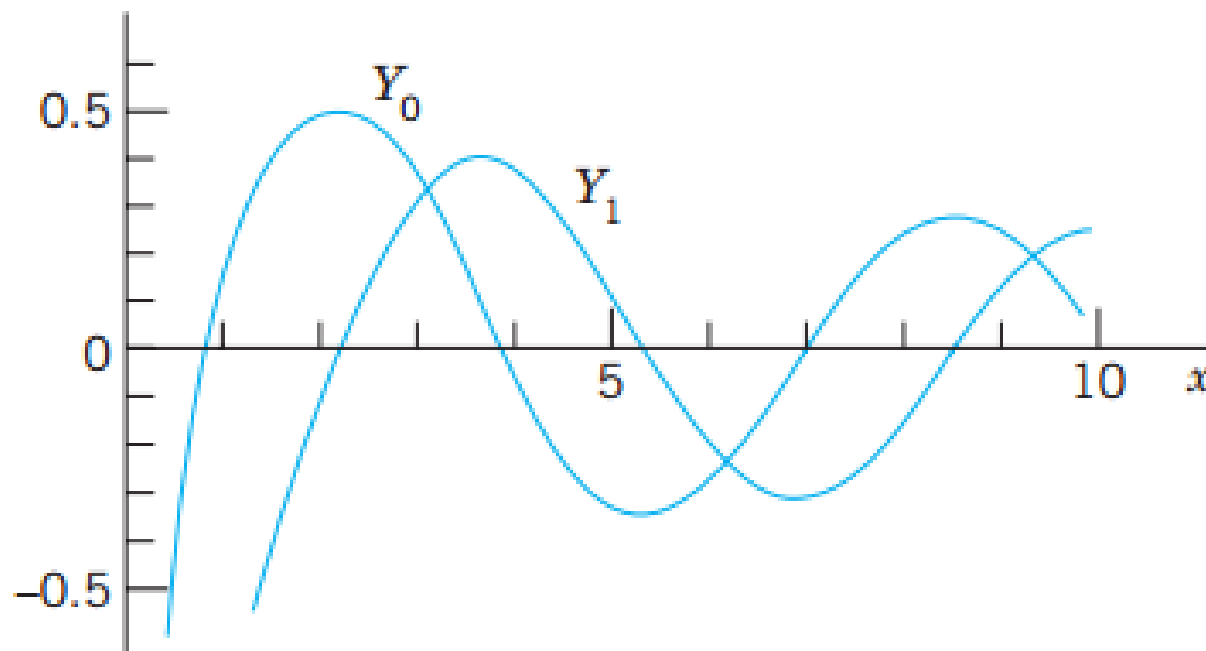
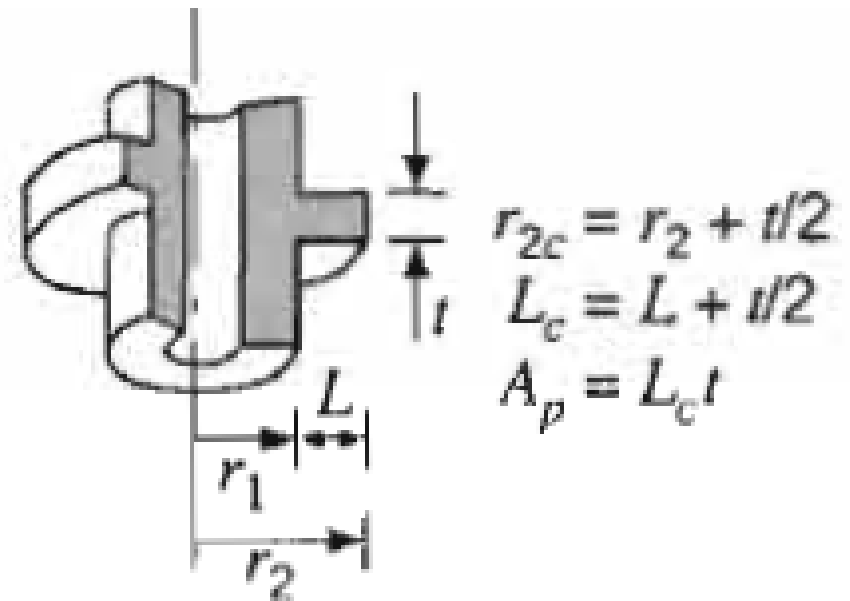
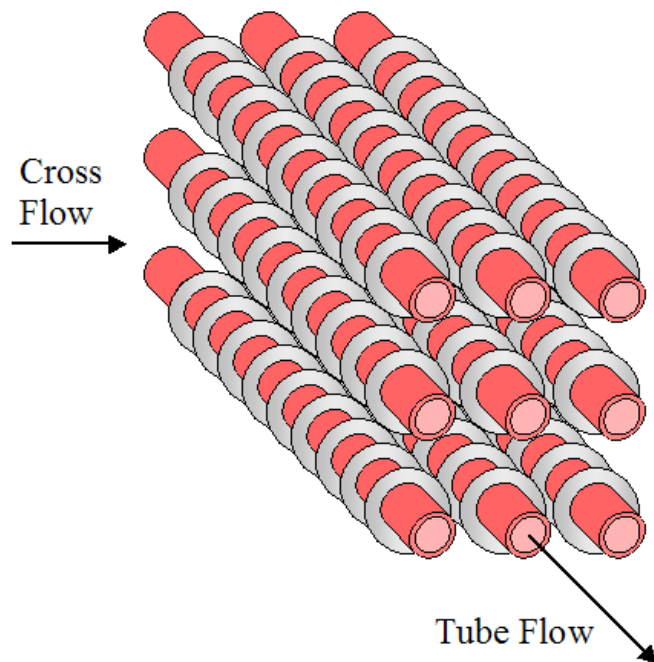


Fig. 112. Bessel functions of the second kind Y_0 and Y_1 .
(For a small table, see App. 5.)



Perfil de temperaturas em aletas





$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{kt} (T - T_\infty) = 0$$

or, with $m^2 \equiv 2h/kt$ and $\theta \equiv T - T_\infty$,

$$\nu = ?$$

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2 \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 y'' + xy' + (a^2 x^2 - \nu^2) y = 0$$

The foregoing expression is a *modified Bessel equation* of order zero, and its general solution is of the form

$$\theta(r) = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

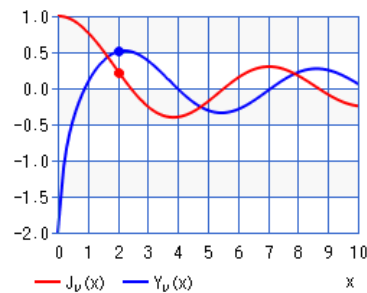
where I_0 and K_0 are modified, zero-order Bessel functions of the first and second kinds, respectively. If the temperature at the base of the fin is prescribed, $\theta(r_1) = \theta_b$, and an adiabatic tip is presumed, $d\theta/dr|_{r_2} = 0$, C_1 and C_2 may be evaluated to yield a temperature distribution of the form

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + K_0(mr)I_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

where $I_1(mr) = d[I_0(mr)]/d(mr)$ and $K_1(mr) = -d[K_0(mr)]/d(mr)$ are modified, first-order Bessel functions of the first and second kinds, respectively. The Bessel func-

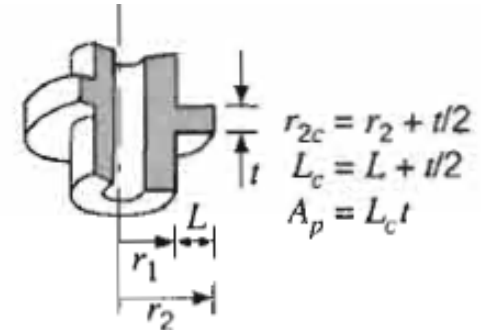


$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + K_0(mr)I_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$



order v real number
 x complex number

Bessel function	result
• $J_v(x)$	0.2238907791412356680518
• $Y_v(x)$	0.5103756726497451195966
$J'_v(x)$	-0.5767248077568733872024
$Y'_v(x)$	0.107032431540937546888



$$m^2 \equiv 2h/kt \text{ and } \theta \equiv T - T_\infty,$$

$$I_1 = I'_0$$

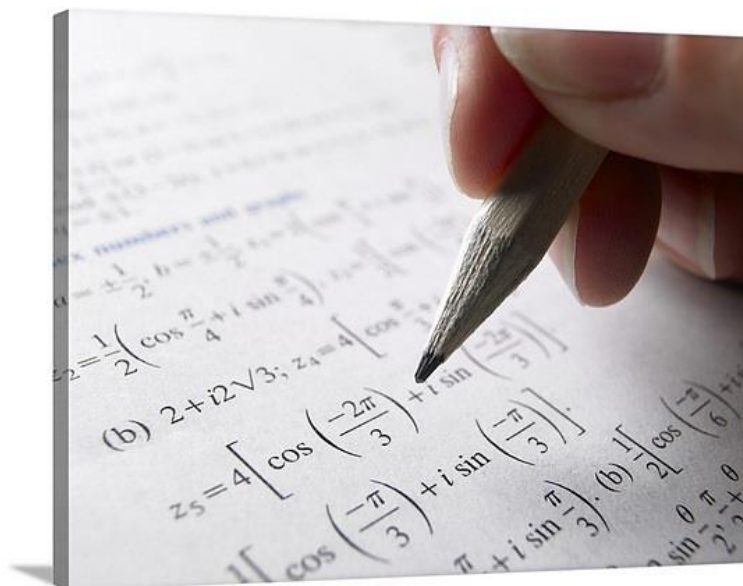
$$K_1 = K'_0$$

<http://keisan.casio.com/exec/system/1180573474>



Lista de exercícios

Lista 9.





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.