



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 14

Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Prof. Diogo Lôndero da Silva



Sumário

1. Motivação
2. Decomposição de edos de alta ordem em sistemas de edos de primeira ordem;
3. Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes
 1. Método de eliminação de variáveis 2×2 ;
 2. Método matricial 2×2 ;
 3. Método matricial $n \times n$;



Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem



Motivação

Sistemas de EDOs

Muitas situações físicas presentes na engenharia são modeladas através de um **conjunto de equações diferenciais**.

Quando existe apenas **uma variável independente** e várias variáveis dependentes, forma-se um sistema de equações diferenciais **ordinárias**.

Devido ao **acoplamento** entre as variáveis, torna-se necessário resolver **simultaneamente** todas as equações presentes no sistema de equações diferenciais.

$$2\frac{dx}{dt} - 5x + \frac{dy}{dt} = e^t$$

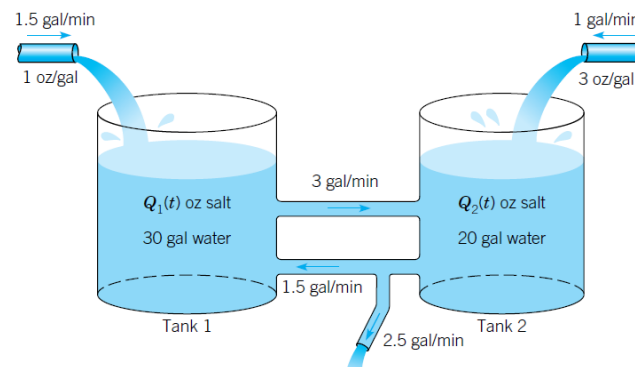
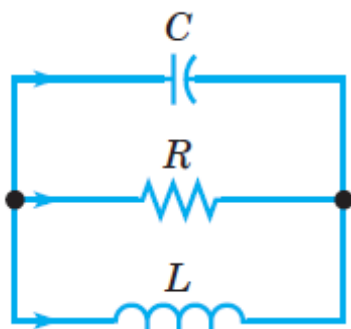
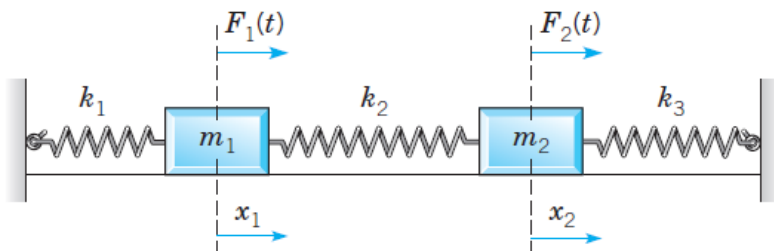
$$\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} = 5e^t$$



Motivação

Sistemas de EDOs

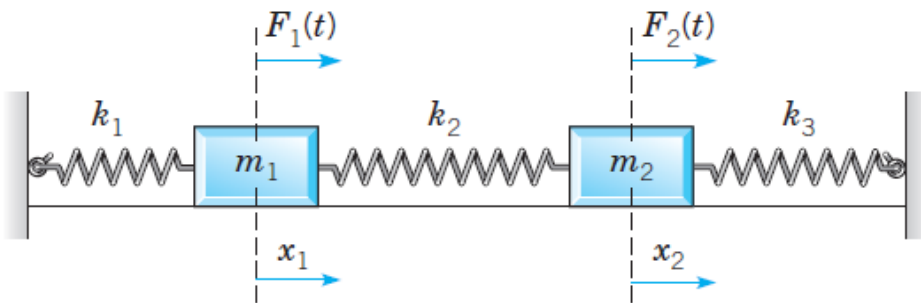
Alguns exemplos de sistemas que são modelados por sistemas de equações diferenciais são apresentados abaixo.





Introdução

Identifique as variáveis independentes e dependente no sistema abaixo



$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{aligned}$$

- Variáveis dependentes: x_1 e x_2
- Variável independente: t (Portanto é um sistema de EDOs)
- As duas EDOs são lineares
- As duas EDOs são não homogêneas devido aos termos F_1 e F_2



Introdução

Equações diferenciais de alta ordem sempre podem ser reescritas como sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Exemplo: Escreva a equação abaixo como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

$$u'' + 0.125u' + u = 0.$$

Definindo $x_1 = u$ e $x_2 = u'$, obtém-se $u'' = x_2'$.

Substituindo estas novas variáveis na EDO acima.

$$x_2' + 0.125x_2 + x_1 = 0.$$

Que permite escrever o seguinte sistema de EDOs para x_1 e x_2 .

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = -x_1 - 0.125x_2.$$



Introdução

Equações diferenciais de alta ordem sempre podem ser reescritas como sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Para transformar uma equação arbitrária de ordem n

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Em um sistema com n equações de primeira ordem, define-se as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ por

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

Derivando estas equações

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \end{aligned} \quad (2)$$



Introdução

Equações diferenciais de alta ordem sempre podem ser reescritas como sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

E através da equação (1)

$$x'_n = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3)$$

As equações (2) e (3) são casos especiais do sistema geral

$$\begin{aligned} x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x'_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (4)$$

De fato, sistemas da forma (4) incluem a maior parte dos casos de interesse prático e serão o foco do nosso estudo.



Introdução

Equações diferenciais de alta ordem sempre podem ser reescritas como sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Exercício: Escreva a equação abaixo como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t)$$

Definindo $x_1 = u$ e $x_2 = u'$, obtém-se $u'' = x_2'$.

Substituindo estas novas variáveis na EDO acima.

$$mx_2' + \gamma x_2 + kx_1 = F(t)$$

Que permite escrever o seguinte sistema de EDOs para x_1 e x_2 .

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m}$$



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes

$$x' = ax + by + \cancel{r_1(t)} \rightarrow 0$$

$$y' = cx + dy + \cancel{r_2(t)} \rightarrow 0$$

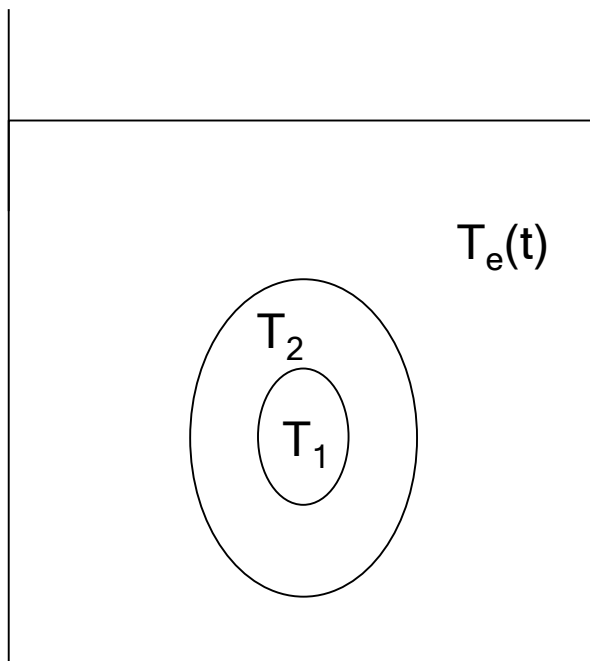
Onde $r_1(t)$ e $r_2(t)$ são nulos e a, b, c, d são constantes.

Nestes sistemas o número de condições iniciais ou de contorno deve ser igual a ordem total do sistema. Neste caso, como temos duas equações diferenciais de primeira ordem, serão necessárias duas condições iniciais ou de contorno.



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Determine a variação da temperatura em função do tempo para as duas regiões que formam o objeto abaixo.





Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

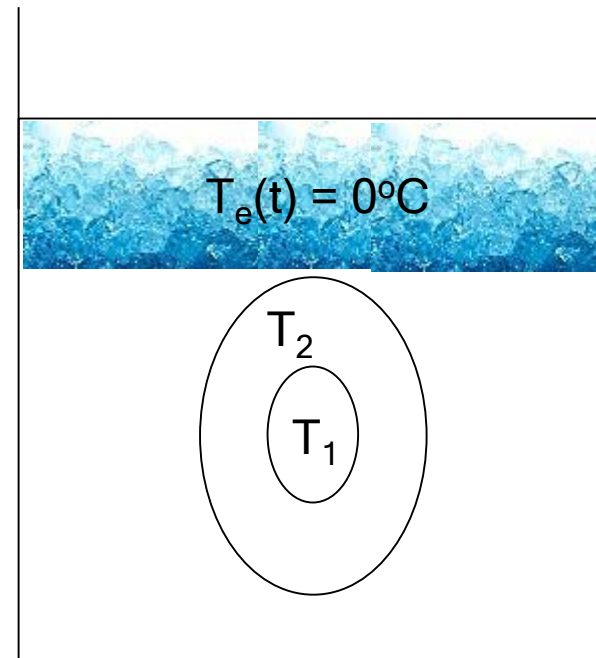
$$\frac{dT_1}{dt} = a(T_2 - T_1)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = a(T_1 - T_2) + b(T(t)_e - T_2)$$



$$T_1' = -aT_1 + aT_2$$

$$T_2' = aT_1 - (a + b)T_2 + bT_e(t)$$



$$T_1(0) = 40^\circ\text{C}$$

$$T_2(0) = 45^\circ\text{C}$$

Para tornar este sistema homogêneo, vamos assumir que $T_e(t) = 0^\circ\text{C}$.
Adicionalmente, vamos assumir $a = 2$ e $b = 3 \text{ [s}^{-1}\text{]}$.



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

$$T_1' = -2T_1 + 2T_2$$

$$T_2' = 2T_1 - 5T_2$$

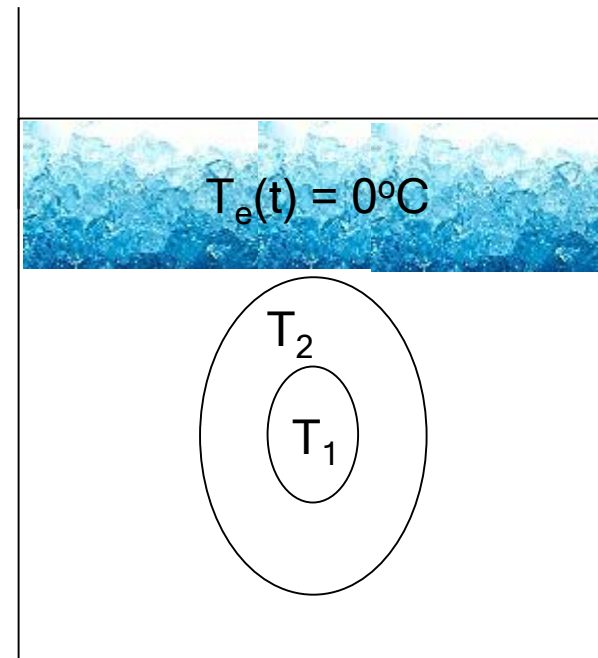
Eliminando T_2 a partir da primeira equação

$$T_2 = \frac{T_1' + 2T_1}{2}$$

Substituindo T_2 na segunda equação

$$\left(\frac{T_1' + 2T_1}{2} \right)' = 2T_1 - 5 \left(\frac{T_1' + 2T_1}{2} \right)$$

$$T_1'' + 7T_1' + 6T_1 = 0 \longrightarrow r^2 + 7r + 6 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_2 = -6 \end{array} \right.$$





Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Empregando as raízes r_1 e r_2 (reais e $\neq$)

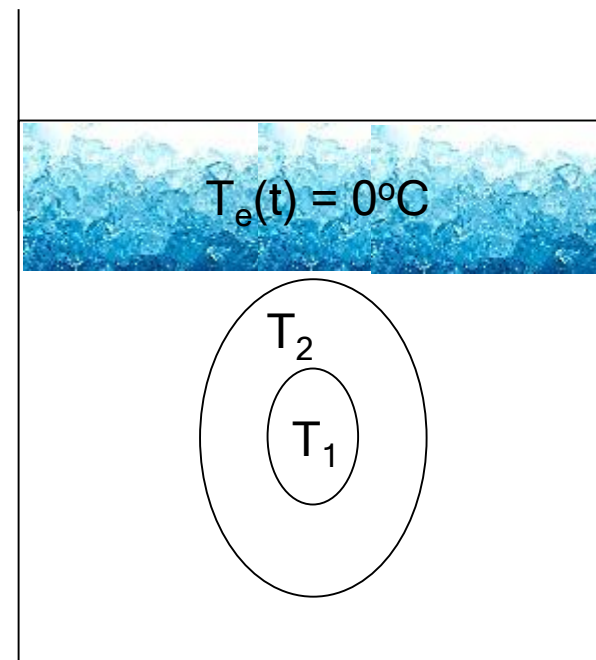
$$T_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t}$$

Substituindo esta solução na equação para T_2

$$T_2 = \frac{T_1' + 2T_1}{2}$$

$$T_2(t) = \frac{-c_1 e^{-t} - 6c_2 e^{-6t} + 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-6t}}{2}$$

$$T_2(t) = \frac{1}{2} c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-6t}$$

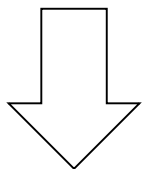




Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Substituindo as condições iniciais nas equações encontradas para T_1 e T_2

$$\begin{cases} T_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t} \\ T_2(t) = \frac{1}{2} c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-6t} \end{cases} \begin{cases} T_1(0) = 40^\circ\text{C} \\ T_2(0) = 45^\circ\text{C} \end{cases}$$

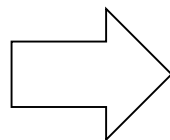


$$40 = c_1 + c_2$$

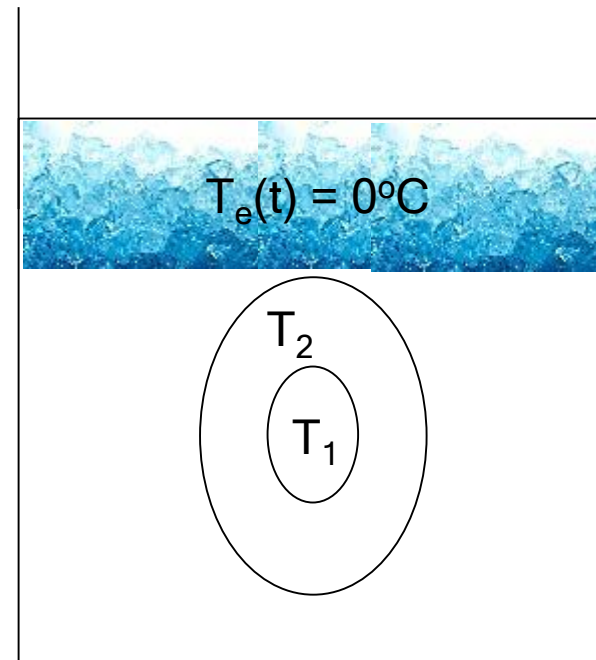
$$45 = \frac{1}{2} c_1 - 2c_2$$

$$c_1 = 50$$

$$c_2 = -10$$



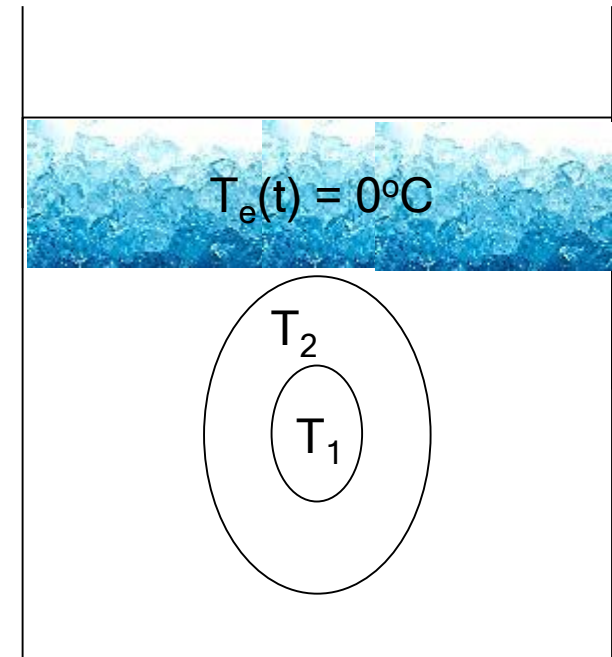
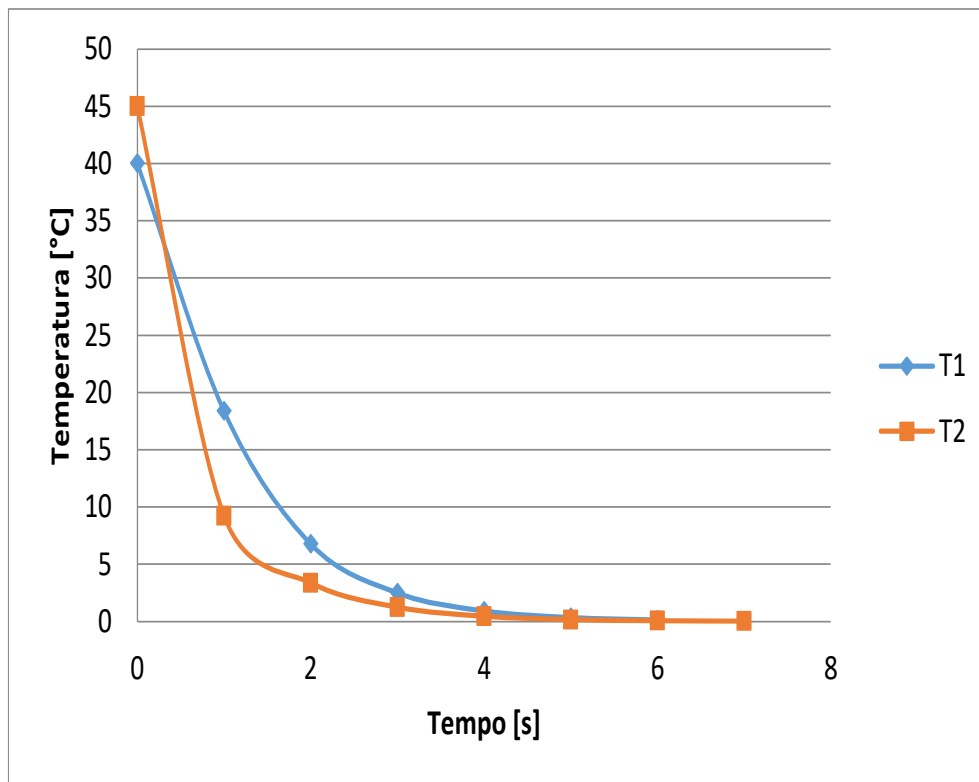
$$\begin{aligned} T_1(t) &= 50e^{-t} - 10e^{-6t} \\ T_2(t) &= 25e^{-t} + 20e^{-6t} \end{aligned}$$





Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Substituindo as condições iniciais nas equações encontradas para T_1 e T_2



$$T_1(t) = 50e^{-t} - 10e^{-6t}$$
$$T_2(t) = 25e^{-t} + 20e^{-6t}$$



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Agora vamos resolver o mesmo sistema empregando um método **matricial** para a solução de sistemas de equações lineares.

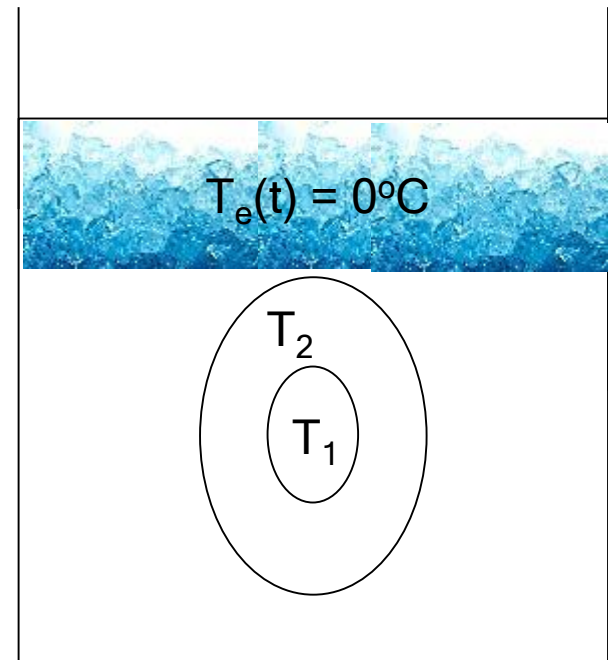
Para tornar o equacionamento mais genérico vamos assumir $T_1 = x$ e $T_2 = y$, assim:

Sistema

$$\begin{aligned}x' &= -2x + 2y \\ y' &= 2x - 5y\end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t} \\ y &= \frac{1}{2} c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-6t}\end{aligned}$$



Rescrevendo na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t}$$



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Com base na solução anterior, espera-se que a solução do sistema de equações tenha a forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

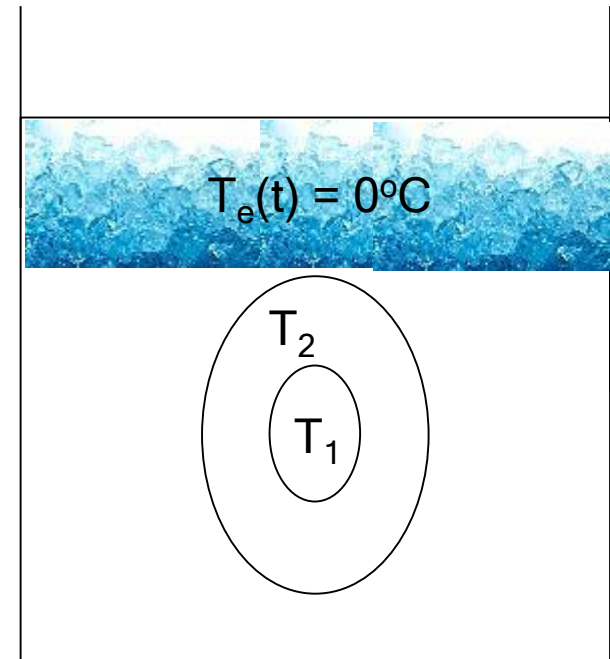
Substituindo esta solução no sistema

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Que é equivalente a

$$\begin{aligned} \lambda a_1 &= -2a_1 + 2a_2 \\ \lambda a_2 &= 2a_1 - 5a_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (-\lambda - 2)a_1 + 2a_2 &= 0 \\ 2a_1 + (-5 - \lambda)a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tratando λ como um parâmetro





Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Este é um sistema linear 2x2 e homogêneo, que possui apenas a solução trivial ($a_1 = a_2 = 0$) se for um sistema determinado.

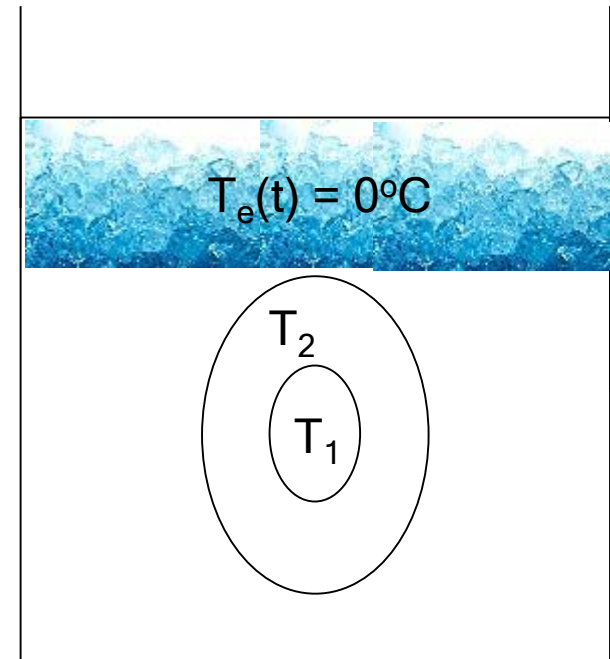
Portanto, para obter a solução não trivial é necessário que:

$$\begin{vmatrix} (-\lambda - 2) & 2 \\ 2 & (-5 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, λ deve atender esta condição para que a solução não trivial exista, que resulta em:

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

Que resulta nas raízes $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -6$. Esses são os únicos valores de λ que permitem encontrar as solução não triviais. Eles devem ser usados separadamente para encontrar a_1 e a_2 .



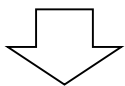


Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Empregando $\lambda_1 = -1$ no sistema de equações original obtém-se:

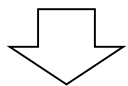
$$(-(-1) - 2)a_1 + 2a_2 = 0$$

$$2a_1 + (-5 - (-1))a_2 = 0$$

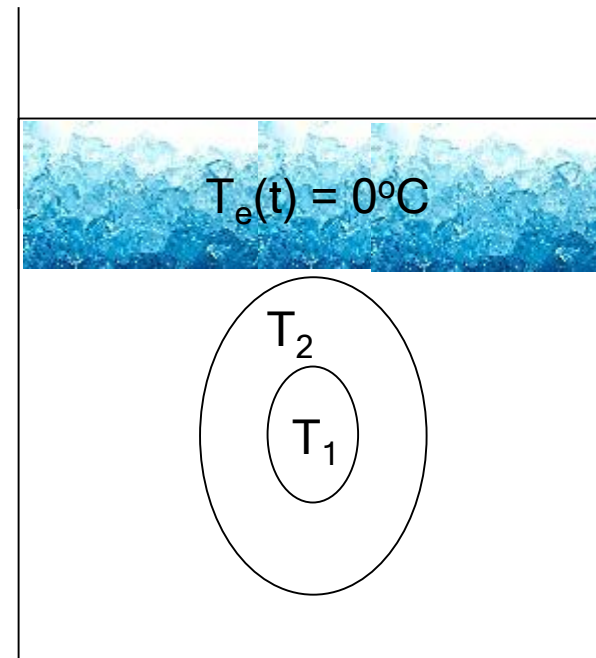


$$-a_1 + 2a_2 = 0$$

$$2a_1 - 4a_2 = 0$$



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$



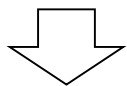


Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Empregando $\lambda_1 = -6$ no sistema de equações original obtém-se:

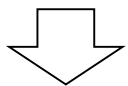
$$(-(-6) - 2)a_1 + 2a_2 = 0$$

$$2a_1 + (-5 - (-6))a_2 = 0$$

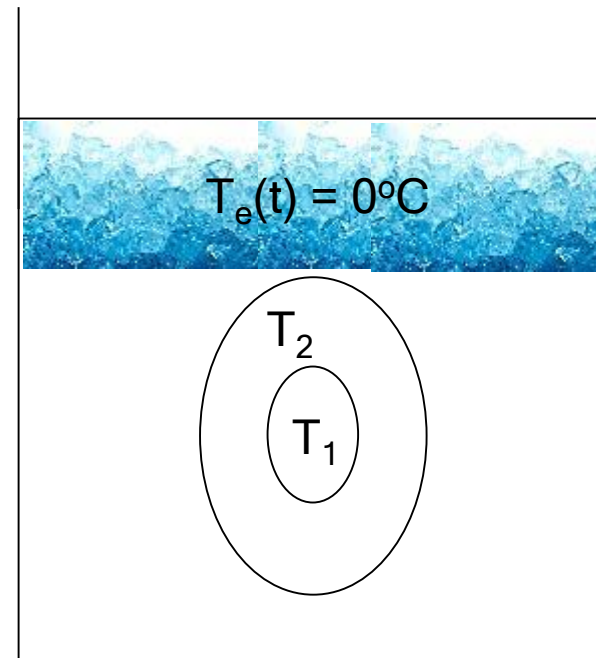


$$4a_1 + 2a_2 = 0$$

$$2a_1 + a_2 = 0$$



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t}$$



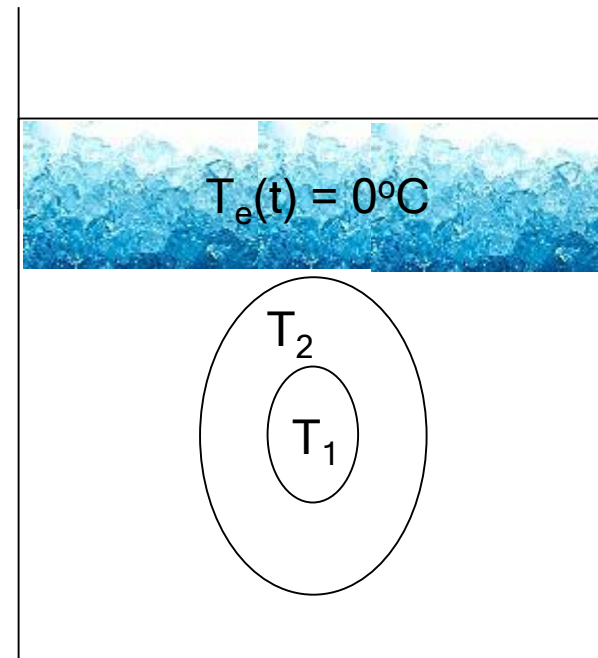


Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Como o sistema de equações diferenciais é linear, é possível empregar o **princípio da superposição** para obter novas soluções. Como as duas soluções obtidas são **linearmente independentes**, a **solução geral** pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \tilde{c}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t}$$

Esta é a mesma solução encontrada pelo método de eliminação, uma vez que as constantes podem assumir diferentes valores em função das condições iniciais.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t}$$

Solução encontrada pelo método de eliminação



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Para um sistema **2x2** podemos propor o seguinte **método genérico**

Sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solução

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Substituindo a solução proposta no sistema

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Que apresentará solução não trivial somente se

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\text{tr}(A)} \lambda + \underbrace{ad - bc}_{\text{det}(A)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{As raízes são os autovaleores } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2.$$



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Para cada **autovalor** λ_1 e λ_2 deve-se encontrar os **autovetores** $\vec{\alpha}$.

$$\vec{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}$$

Através da resolução do sistema

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando o princípio da superposição, obtém-se a **solução geral**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \tilde{c}_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \tilde{c}_1 a_{11} e^{\lambda_1 t} + \tilde{c}_2 a_{12} e^{\lambda_2 t} \\ y &= \tilde{c}_1 a_{21} e^{\lambda_1 t} + \tilde{c}_2 a_{22} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$



Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Para um sistema $n \times n$ podemos propor o seguinte **método geral**

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \vec{x} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} &= A \end{aligned} \right\} \vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{Com solução na forma} \quad \vec{x} = \vec{\alpha}e^{\lambda t} \quad (1)$$
$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

Substituindo a solução proposta e sua derivada no sistema de equações diferenciais (1).

$$\lambda \vec{\alpha} e^{\lambda t} = A \vec{\alpha} e^{\lambda t} \Rightarrow A \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow (A - \lambda I) \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \text{Autovalores } \lambda \Rightarrow \text{Autovetores} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

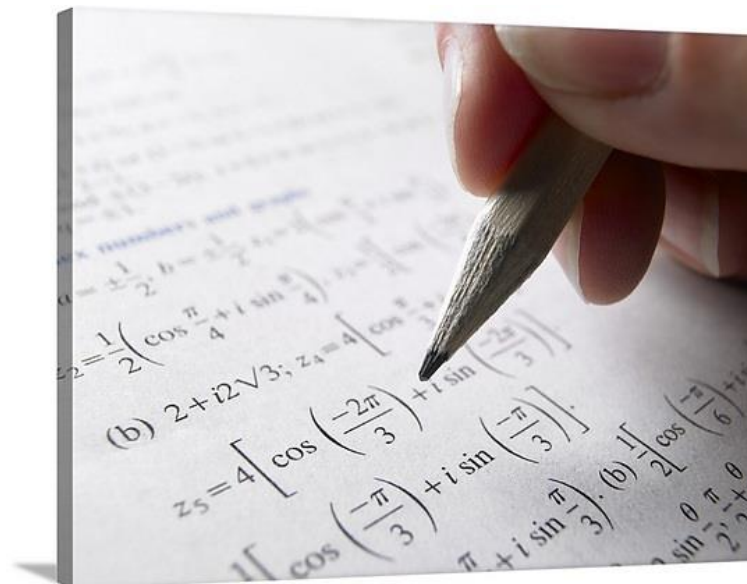
Equação característica



Lista de exercícios

Lista 11

Secção - 7.1





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2