



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 13

Transformadas de Laplace – Parte II

Prof. Diogo Lôndero da Silva



Sumário

1. Função Impulso
2. Convolução



Função Impulso ou Função delta de Dirac



Transformadas de Laplace

Função de impulso

Em algumas aplicações, é necessário tratar fenômenos de **natureza impulsiva**, por exemplo, voltagens ou forças de módulo grande que agem por um período de tempo muito curto. Tais problemas levam, com frequência, a equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

Onde $g(t)$ é grande em um intervalo pequeno de tempo $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$, mas **é nula fora** deste intervalo.



Estas situações ocorrem quando uma bola é chutada, uma estrutura é atingida por um martelo, uma aeronave tem um pouso violento ou um navio é atingido por uma forte onda.



Transformadas de Laplace

Função de impulso

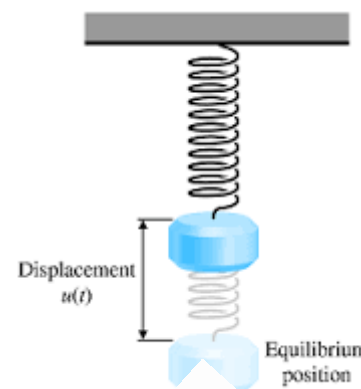
Um impulso I representa a ação de uma força em um determinado intervalo de tempo:

$$I(t) = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

Destaca-se que $f(t) = 0$ fora deste intervalo de tempo.

Exemplo: Assumindo uma força contínua $f(t) = F$ obtém-se:

$$I(t) = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} F dt = F \cdot (2\tau)$$





Transformadas de Laplace

Função de impulso

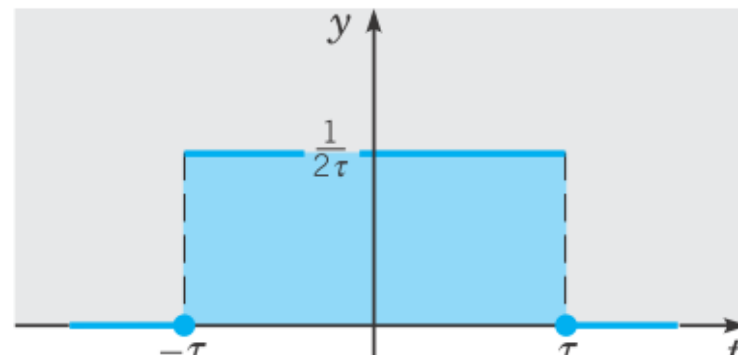
Vamos supor que $t_0 = 0$ e que $g(t)$ é dada por

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau, \\ 0, & t \leq -\tau \text{ or } t \geq \tau, \end{cases}$$

Onde τ é uma constante positiva pequena. Calculando I para esta $g(t)$, obtêm-se

$$I(t) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)dt = \int_{0-\tau}^{0+\tau} \frac{1}{2\tau} dt = 1$$

Independente do valor de τ , desde que $\tau \neq 0$.





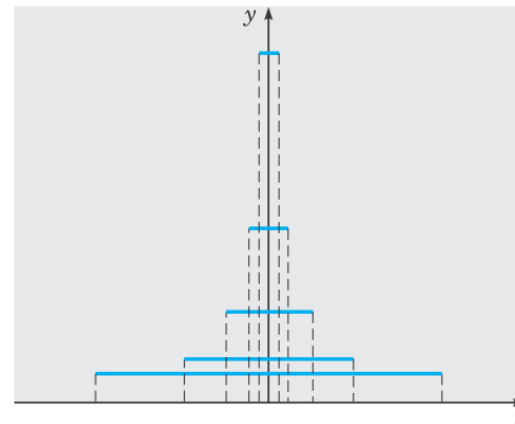
Transformadas de Laplace

Fazendo com que o termo não homogêneo $g(t)$, da equação diferencial, atue em intervalos cada vez menores, isto é, $\tau \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} d_{\tau}(t) = 0, \quad t \neq 0.$$

Além disso, como $I(\tau) = 1$ para todo $\tau \neq 0$, segue que:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = 1.$$



As equações acima podem ser empregadas para definir a função **impulso unitário** δ que funciona como um impulso de tamanho 1 em $t=0$, e é nula para todos os outros valores de t diferentes de zero. Esta “função” é chamada de **delta de Dirac**.

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$



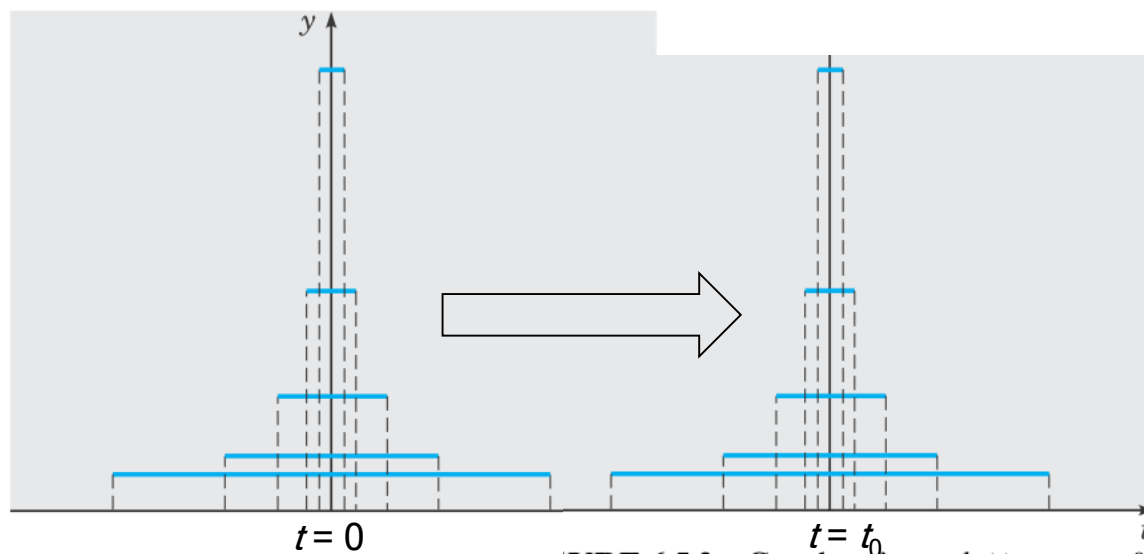
Transformadas de Laplace

Como $\delta(t)$ corresponde a um impulso unitário em $t = 0$, um impulso unitário em um ponto arbitrário $t = t_0$ é dado por $\delta(t - t_0)$, assim

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Note que esta mudança equivale a deslocar a função delta de $t=0$ para um $t=t_0$.





Transformadas de Laplace

O cálculo da transformada de Laplace da função delta de Dirac exige a utilização do limite $\tau \rightarrow 0$ na transformada da função $d_\tau(t)$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\}.$$

Que resulta em

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}.$$

De maneira análoga, é possível definir a integral do produto da função δ por qualquer função continua f , resultando em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$



Transformadas de Laplace

Esta última equação é útil para obter a transformada de uma função multiplicada pelo delta de Dirac, como mostram os exemplos abaixo:

Example 1. $\int_{-5}^5 7e^{t^2} \cos(t) \delta(t) dt = 7$. All we had to do was evaluate the integrand at $t = 0$.

Example 2. $\int_{-5}^5 7e^{t^2} \cos(t) \delta(t - 2) dt = 7e^4 \cos(2)$. All we had to do was evaluate the integrand at $t = 2$.

Example 3. $\int_{-5}^1 7e^{t^2} \cos(t) \delta(t - 2) dt = 0$. Since $t = 2$ is not in the interval of integration the integrand is 0 on the entire interval.

Portanto, basta avaliar a função integrada no ponto t_0 determinado por $\delta(t-t_0)$, tomando o cuidado para que t_0 esteja dentro do intervalo de integração.



Transformadas de Laplace

Exemplo: Encontre a solução para

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t - 5), \quad (17)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (18)$$

Aplicando a transformada de Laplace na eq. 17

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = e^{-5s}.$$

Então

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2} = \frac{e^{-5s}}{2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}. \quad (19)$$

Empregando o teorema de deslocamento e a tabela de transformadas

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} \right\} = \frac{4}{\sqrt{15}} e^{-t/4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t. \quad (20)$$

Então

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{-(t-5)/4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} (t - 5), \quad (21)$$



Transformadas de Laplace

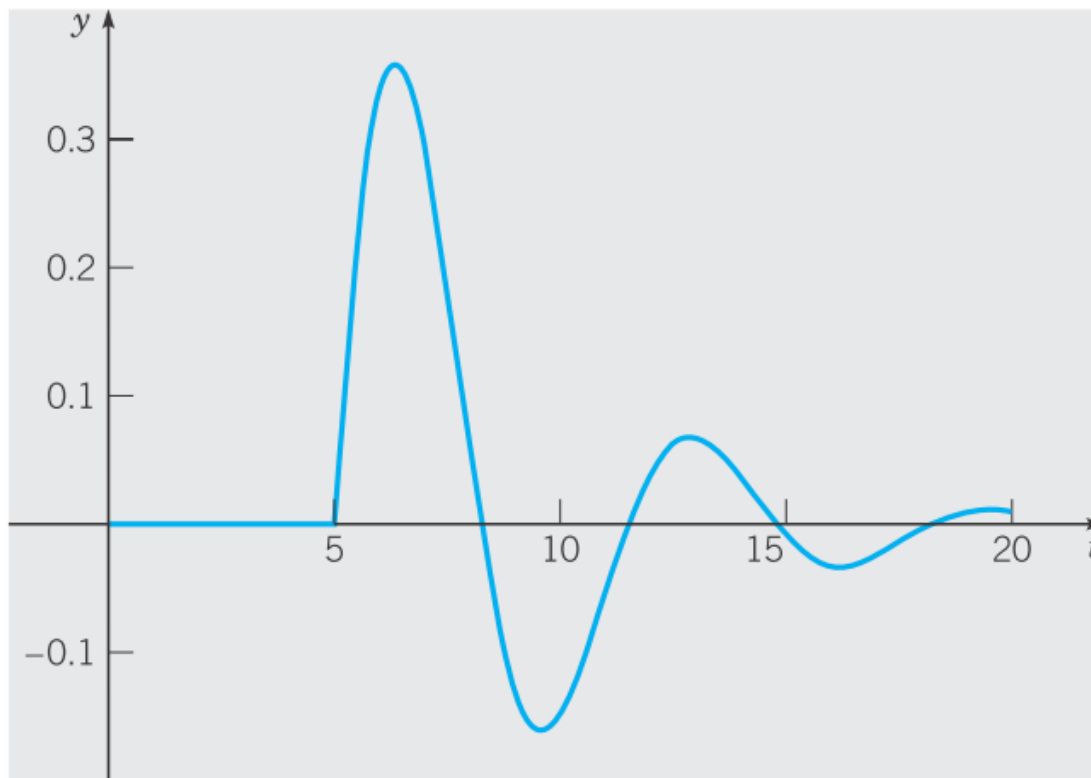


FIGURE 6.5.3 Solution of the initial value problem (17), (18).

Este gráfico representa a solução da equação 17 sujeitas as CIs 18. Observe a ação da função impulso no tempo $t = 5$ [t].



Convolução



Transformadas de Laplace - Convolução

Vimos que,

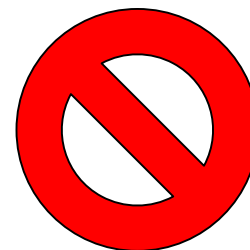
$$\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F + G] = \mathcal{L}^{-1}[F] + \mathcal{L}^{-1}[G]$$

É interessante se obtermos também uma regra para a multiplicação:

$$\mathcal{L}[fg] \neq \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] \neq \mathcal{L}^{-1}[F]\mathcal{L}^{-1}[G]$$



- Algumas vezes nos deparamos com transformadas de Laplace $H(s)$ que correspondem **ao produto de duas outras transformadas** $H(s) = F(s) G(s)$.
- Note que a transformada de Laplace **não** apresenta a **propriedade comutativa**.
- Como tratar esse problema?



Transformadas de Laplace - Convolução

Definição 1: Convolução

Definimos a operação de convolução como:

$$(f * g) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Com esta definição o teorema pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = (f * g)$$

Exemplo 6: Encontre a transformada inversa da função

$$H(s) = \frac{1}{s(s-a)} = \frac{1}{s} \frac{1}{(s-a)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s-a)} \right] = \int_0^t e^{a\tau} \cdot 1 d\tau = \frac{e^{a\tau}}{a} \Big|_0^t = \frac{e^{at} - 1}{a}$$



Transformadas de Laplace - Convolução

Demonstração: Por hipótese,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$$

Multiplicando as duas funções

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau.$$

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) \left[\int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \right] d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} g(\tau) \left[\int_0^{\infty} e^{-s(\xi+\tau)} f(\xi) d\xi \right] d\tau.$$

Chamando $t = \tau + \xi$

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} g(\tau) \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t - \tau) dt \right] d\tau. \quad \xi = t - \tau, \text{ com } t = 0$$

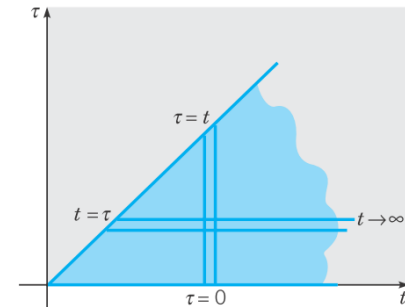
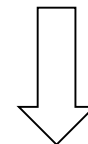
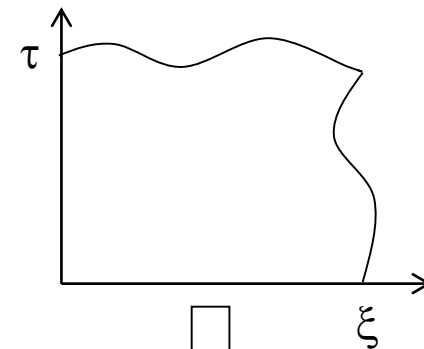


FIGURE 6.6.1 Region of integration in $F(s)G(s)$



Transformadas de Laplace - Convolução

Trocando a ordem da integração

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\overbrace{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau}^{h(t)} \right] dt$$

Ou

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt \\ &= \mathcal{L}\{h(t)\}, \end{aligned}$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

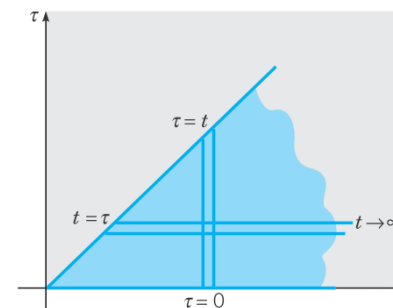
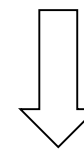
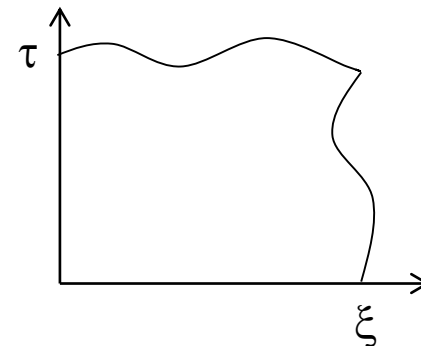


FIGURE 6.6.1 Region of integration in $F(s)G(s)$.



Transformadas de Laplace - Convolução

Teorema da convolução

Definição 1: Convolução

Definimos a operação de convolução como:

$$(f * g) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Com esta definição o teorema pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = (f * g)$$

Teorema 6: Propriedades da Convolução

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * v = f * (g * v)$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$



Transformadas de Laplace - Convolução

Exemplo

Encontre a solução de

$$y'' + 4y = g(t),$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Aplicando a transformada de Laplace e utilizando as CIs

$$s^2 Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

Ou

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 4} + \frac{G(s)}{s^2 + 4}.$$

É conveniente reescrever $Y(s)$ como

$$Y(s) = 3 \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} G(s).$$

↙
O produto de duas transformadas exige o uso da convolução para obter $\mathcal{L}^{-1}$

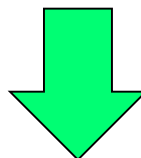


Transformadas de Laplace - Convolução

Exemplo

Usando a tabela de transformadas de Laplace e o teorema de convolução, obtém-se:

$$Y(s) = 3 \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} G(s).$$



$$y = 3 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

Quando um termo não-homogêneo específico g é dado, então a integral da equação acima pode ser calculada.

Em alguns casos é preciso empregar métodos numéricos para obter o valor da integral.



Transformadas de Laplace - Convolução

Exemplo 8: Ache a solução do P.V.I. $y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega_0 t$
 $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$

Aplicando a transformada em ambos os lados

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + \omega_0^2 Y(s) = \frac{K\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Substituindo as condições iniciais

$$s^2 Y(s) + \omega_0^2 Y(s) = \frac{K\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Isolando $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{K\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \frac{K}{\omega_0} \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right)$$



Transformadas de Laplace - Convolução

Exemplo 8: Ache a solução do P.V.I. $y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega_0 t$
 $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$

$$Y(s) = \frac{K\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \frac{K}{\omega_0} \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right)$$

Aplicando a inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y(s)] = \frac{K}{\omega_0} \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \right]$$

Mas sabemos da tabela que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \right] = \sin(\omega_0 t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \right] = [\sin(\omega_0 t) * \sin(\omega_0 t)]$$



Transformadas de Laplace - Convolução

Exemplo 8: Ache a solução do P.V.I. $y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega_0 t$
 $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \right] = [\sin(\omega_0 t) * \sin(\omega_0 t)]$$

Aplicando a convolução

$$\begin{aligned} [\sin(\omega_0 t) * \sin(\omega_0 t)] &= \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) \sin[\omega_0(t - \tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - t \cos(\omega_0 t) \right] \end{aligned}$$

Logo a solução da E.D.O. fica

$$y(t) = \frac{K}{2\omega_0^2} [\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)]$$



Transformadas de Laplace

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n, \quad n = \text{positive integer}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $



Transformadas de Laplace

Tabela de Transformadas de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

8. $\cosh at$

$$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|$$

9. $e^{at} \sin bt$

$$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}, \quad s > a$$

10. $e^{at} \cos bt$

$$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}, \quad s > a$$

11. $t^n e^{at}$, $n = \text{positive integer}$

$$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}, \quad s > a$$

12. $u_c(t)$

$$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$$

13. $u_c(t)f(t - c)$

$$e^{-cs}F(s)$$



Transformadas de Laplace

Tabela de Transformadas de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$14. e^{ct}f(t)$$

$$F(s - c)$$

$$15. f(ct)$$

$$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$$

$$16. \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

$$F(s)G(s)$$

$$17. \delta(t - c)$$

$$e^{-cs}$$

$$18. f^{(n)}(t)$$

$$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

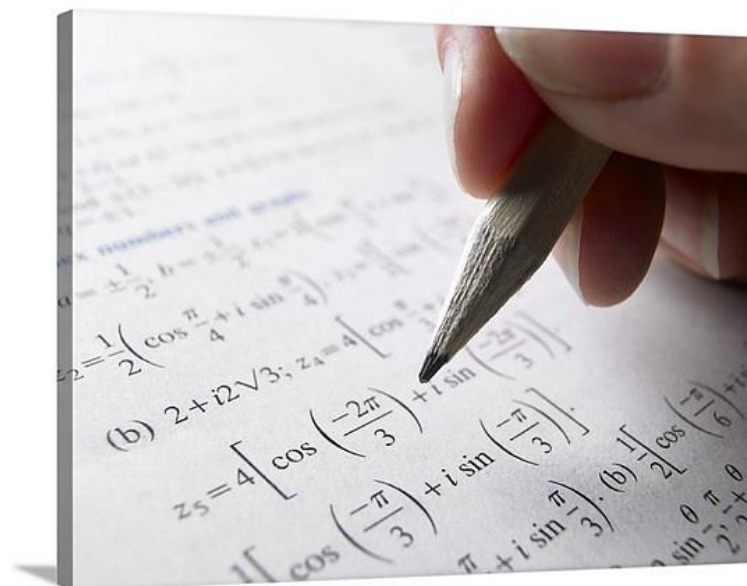
$$19. (-t)^n f(t)$$

$$F^{(n)}(s)$$



Lista de exercícios

Lista 10 (Secção 6.5 em diante).





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2
- Siebert, D., 2015. Materiais de Aula, Séries e Equações Diferenciais, Universidade Federal de Santa Catarina.



Transformadas de Laplace - Convolução

Exemplo

Encontre a solução de

$$y'' + 4y = g(t),$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Aplicando a transformada de Laplace e utilizando as CIs

$$s^2 Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

Ou

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 4} + \frac{G(s)}{s^2 + 4}.$$

É conveniente reescrever $Y(s)$ como

$$Y(s) = 3 \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} G(s).$$

O produto de duas transformadas exige o uso da convolução para obter L^{-1}

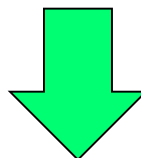


Transformadas de Laplace - Convolução

Exemplo

Usando a tabela de transformadas de Laplace e o teorema de convolução, obtém-se:

$$Y(s) = 3 \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} G(s).$$



$$y = 3 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

Quando um termo não-homogêneo específico g é dado, então a integral da equação acima pode ser calculada.

Em alguns casos é preciso empregar métodos numéricos para obter o valor da integral.



Transformadas de Laplace - Convolução

Função transferência

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay'_0 = G(s).$$

$$\Phi(s) = \frac{(as + b)y_0 + ay'_0}{as^2 + bs + c}, \quad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c},$$

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s).$$

$$y = \phi(t) + \psi(t),$$



Transformadas de Laplace - Convolução

Função transferência

Para obter a função transferência devemos utilizar CIs nulas

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

Desta forma ϕ é nula e ψ resulta em

Once specific values of a , b , and c are given, we can find $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ by using Table 6.2.1, possibly in conjunction with a translation or a partial fraction expansion. To find $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$, it is convenient to write $\Psi(s)$ as

$$\Psi(s) = H(s)G(s), \quad (27)$$

where $H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1}$. The function H is known as the **transfer function**³ and depends only on the properties of the system under consideration; that is, $H(s)$ is determined entirely by the coefficients a , b , and c . On the other hand, $G(s)$ depends

³This terminology arises from the fact that $H(s)$ is the ratio of the transforms of the output and the input of the problem (26).



Transformadas de Laplace - Convolução

Função transferência

only on the external excitation $g(t)$ that is applied to the system. By the convolution theorem we can write

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\} = \int_0^t h(t - \tau)g(\tau) d\tau, \quad (28)$$

where $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, and $g(t)$ is the given forcing function.

To obtain a better understanding of the significance of $h(t)$, we consider the case in which $G(s) = 1$; consequently, $g(t) = \delta(t)$ and $\Psi(s) = H(s)$. This means that $y = h(t)$ is the solution of the initial value problem

$$ay'' + by' + cy = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (29)$$

obtained from Eq. (26) by replacing $g(t)$ by $\delta(t)$. Thus $h(t)$ is the response of the system to a unit impulse applied at $t = 0$, and it is natural to call $h(t)$ the **impulse response** of the system. Equation (28) then says that $\psi(t)$ is the convolution of the impulse response and the forcing function.

Referring to Example 2, we note that in that case, the transfer function is $H(s) = 1/(s^2 + 4)$ and the impulse response is $h(t) = (\sin 2t)/2$. Also, the first two terms on the right side of Eq. (19) constitute the function $\phi(t)$, the solution of the corresponding homogeneous equation that satisfies the given initial conditions.