Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 12

Transformadas de Laplace

Prof. Diogo Lôndero da Silva

Sumário

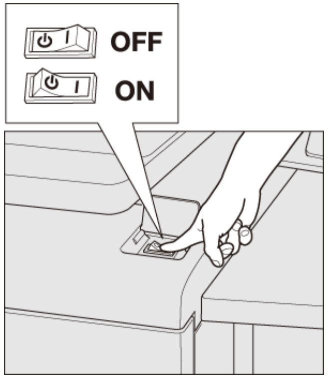
Transformadas de Laplace

Motivação

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças descontínuas ou de impulsos.

Os métodos estudados até o momento, são complicados para usar em tais problemas.

As **Transformadas de Laplace** são muito adequadas para este tipo de situação física, mas também podem ser usadas de forma mais abrangente.



Transformadas de Laplace

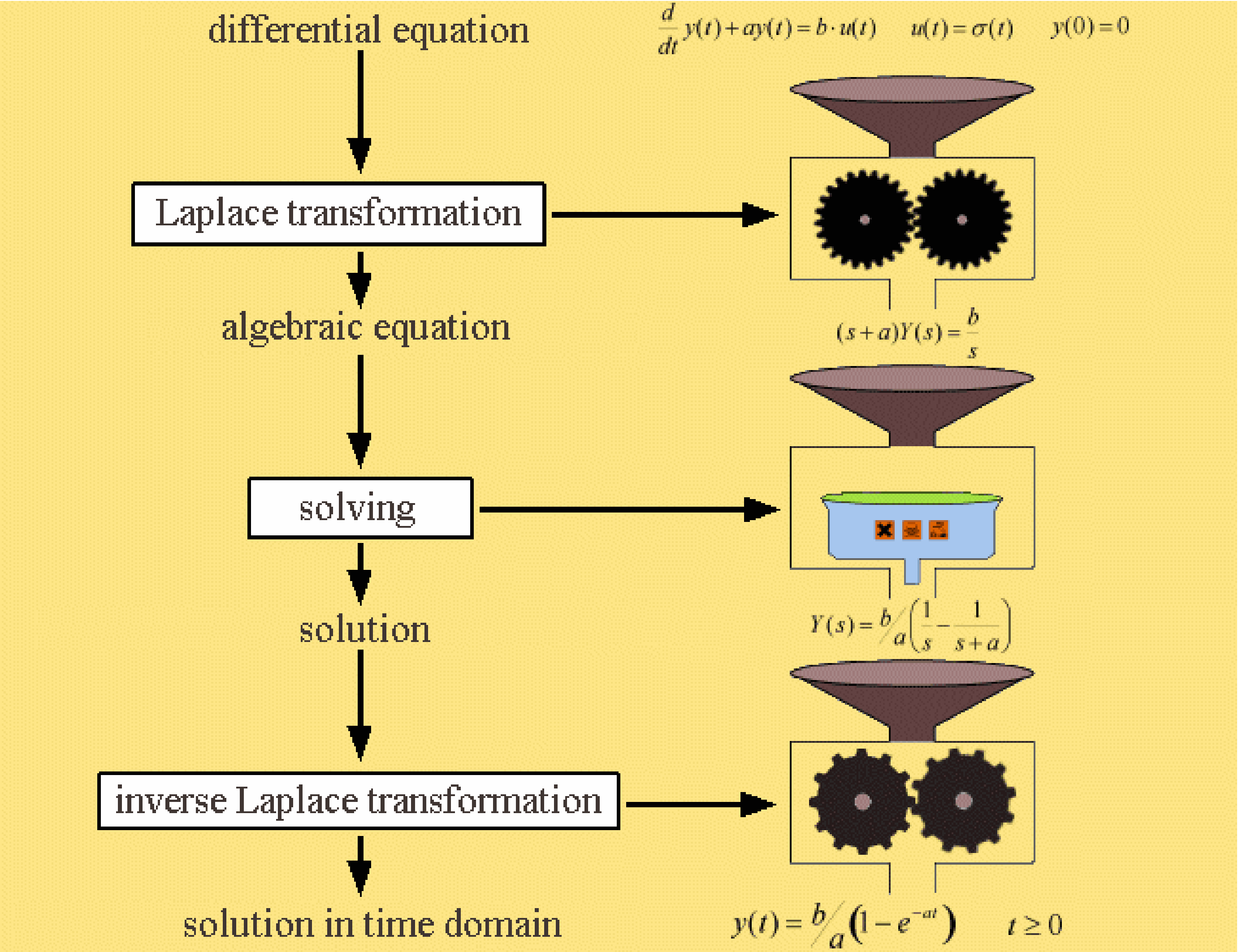
A transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial da forma

$$Ay'' + By' + Cy = f(t)$$

com $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ e $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Para isso, a equação diferencial é inicialmente transformada pela Transformada de Laplace numa equação algébrica. Depois resolve-se a equação algébrica e finalmente transforma-se de volta a solução da equação algébrica na solução da equação diferencial inicial.

Transformadas de Laplace



Transformadas de Laplace

Entre as ferramentas muito úteis para a resolução de equações diferenciais estão as transformadas integrais, que apresentam a forma:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t)\, dt$$

Onde K(s,t) é uma função dada, chamada núcleo da transformada.

Esta relação transforma uma função f(t) em outra função F(s).

Apesar de existirem diversas transformadas integrais, vamos considerar apenas a Transformada de Laplace.

Transformadas de Laplace

Núcleo

A transformada de Laplace de uma função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty \boxed{e^{-st}} f(t)\, dt.$$

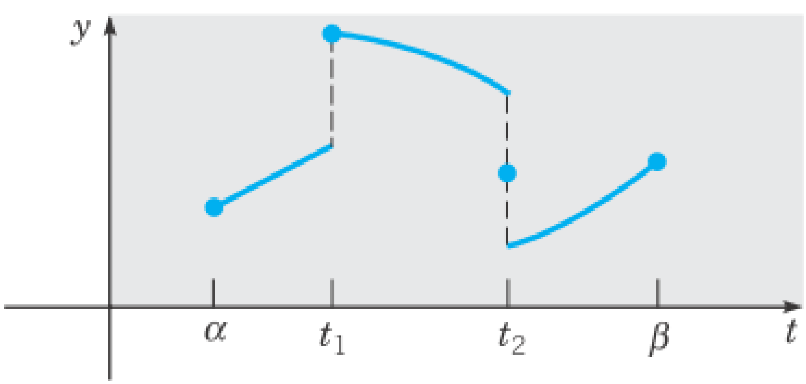
para todo $s > 0$ tal que a integral acima converge. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por t. Enquanto a transformada de Laplace será representada pela letra correspondente maiúscula e a sua variável por s.

Transformadas de Laplace

Uma função é dita **seccionalmente contínua** em um intervalo $\alpha \le t \le \beta$ se o intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, de modo que:

1 - f é contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$

2 - f tende a um limite finito quando t tende, de dentro de um desses subintervalos, a um dos extremos.



f é **seccionalmente contínua** se for contínua nesse intervalo, exceto por um número finito de saltos. Neste caso pode-se mostrar a existência de:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$$

Apesar de $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ existir para uma função f(x) **seccionalmente contínua** a existência da integral imprópria $\int_{\alpha}^{\infty} f(t)dt$ não é garantida . O teorema a seguir é útil para verificar a convergência ou divergência de uma integral imprópria.

Teorema: f é seccionalmente contínua em t ≥a , se |*f* (t)| ≤ g(t) quando t ≥ M para algumas constantes positivas M e se $\int_{M}^{\infty} g(t)dt$ converge, então $\int_{M}^{\infty} f(t)dt$ também converge. Por outro lado, se f(t) ≥ g(t) ≥ 0 para t ≥ M e se $\int_{M}^{\infty} g(t)dt$ diverge, então $\int_{M}^{\infty} f(t)dt$ também diverge.

Note a semelhança com o teste de comparação para séries!

Propriedades da transformada de Laplace

Teorema

Suponha que

1. f *é contínua por partes no intervalo* $0 \leq t \leq A$ *para qualquer* A *positivo.*
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ *quando* $t \geq M$. *Onde* K, a *e* M *são constantes reais com* K *e* M *necessariamente positivas.*

Então a transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$, *existe para* $s > a$.

Seja f uma função que satisfaz as condições do Teorema acima, então f é dita admissível.

Para estabelecer este teorema, precisamos mostrar que a integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt.$$

Converge para s>a. Separa-se esta integral em duas partes

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{M} e^{-st} f(t)\, dt + \int_M^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

A primeira integral converge pela parte 1 do teorema anterior. Pela hipótese 2, temos, para t ≥ M,

$$|e^{-st} f(t)| \leq K e^{-st} e^{at} = K e^{(a-s)t},$$

Assim, F(s) existe se $\int_M^{\infty} e^{(a-s)t} dt$ convergir, o que exige que a – s < 0 ou s > a.

Propriedades da transformada de Laplace

Teorema

Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, para $s > a_1$, e a transformada de Laplace de $g(t)$ é $G(s)$, para $s > a_2$, então para quaisquer constantes α e β

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(g)(s) = \alpha F(s) + \beta G(s),$$

para $s > \max\{a_1, a_2\}$.

Portanto, a Transformada de Laplace é um **operador linear**!

Propriedades da transformada de Laplace

Teorema

Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ admissíveis se

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s), \quad \textit{para } s > a,$$

então $f(t) = g(t)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Portanto, se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função admissível $f(t)$, esta função está determinada a menos dos pontos de descontinuidade e dizemos que $f(t)$ é a **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ e escrevemos simplesmente

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = f(t),$$

considerando duas funçõees iguais, se elas forem iguais em todos os pontos onde ambas são contínuas.

Exemplo 1

A transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s} = 0 - \frac{e^{-s0}}{-s} = \frac{1}{s},$$

para $s > 0$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Exemplo 2

Seja a uma constante real. A transformada de Laplace da função $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=e^{at}$ é dada por

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^{\infty} \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{e^{(a-s)T}}{a-s}-\frac{e^{(a-s)0}}{a-s} = 0-\frac{1}{a-s}=\frac{1}{s-a}, \end{aligned}$$

para $s>a$.

Propriedades da transformada de Laplace

Exemplo

Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 - 3s + 2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$.

Podemos decompor $F(s)$ em frações parciais

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 - 3s + 2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

$$s + 3 = A(s-2) + B(s-1) \quad \rightarrow \quad A = -4 \text{ e } B = 5.$$

Assim,

$$F(s) = -4\frac{1}{s-1} + 5\frac{1}{s-2}$$

e a função cuja transformada é $F(s)$ é

$$f(t) = -4e^{t} + 5e^{2t}.$$

Derivação da transformada de Laplace

Teorema

Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função admissível é contínua*

1. *Se* $f'(t)$ *é contínua por partes, então*

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0),$$

em que $F(s)$ *é a transformada de Laplace de* $f(t)$.

2. *Se* $f'(t)$ *é admissível e contínua e* $f''(t)$ *é contínua por partes, então*

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

em que $F(s)$ *é a transformada de Laplace de* $f(t)$.

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n, \quad n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}, \quad n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \qquad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$

Solução de problemas de valores iniciais

Exemplo

Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$\left(s^2\mathcal{Y}(s) - sy(0) - y'(0)\right) + (s\mathcal{Y}(s) - y(0)) - 2\mathcal{Y}(s) = 2\frac{1}{s^2}$$

Substituindo os valores iniciais obtemos

$$(s^2 + s - 2)\mathcal{Y}(s) = \frac{2}{s^2} + 1$$

Assim, $\mathcal{Y}(s) = \dfrac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$.

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1}.$$

Logo,

$s^2 + 2 = As(s+2)(s-1) + B(s+2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2).$

Substituindo-se $s = -2, 0, 1$, obtemos

$$A = -\frac{1}{2} \quad B = -1, \quad C = -\frac{1}{2} \quad D = 1.$$

Assim,

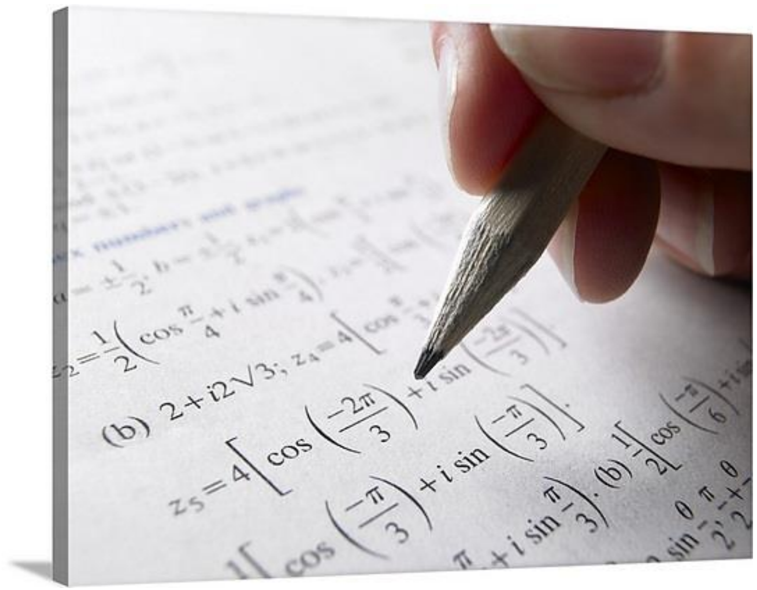
$$\mathcal{Y}(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1},$$

de onde obtemos

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t.$$

Lista de exercícios

Lista 10 (Até secção 6.2).



Equações com termo não homogêneo descontínuo

- Algumas das aplicações mais importantes do método das transformadas de Laplace ocorrem na solução de equações diferenciais lineares sob a ação de funções descontínuas ou impulsos;

- Equações deste tipo ocorrem com frequência na análise do fluxo de corrente em circuitos elétricos ou nas vibrações de sistemas mecânicos;

- Nesta etapa vamos desenvolver algumas propriedades adicionais das transformadas de Laplace úteis na solução de tais problemas.

Equações com termo não homogêneo descontínuo

Para resolver problemas de valor inicial da forma

$$Ay'' + By' + Cy = f(t),$$

com $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ e $A, B, C \in \mathbb{R}$ em que $f(t)$ é uma função descontínua vamos escrever $f(t)$ em termos da função de Heaviside.

Seja a uma constante maior ou igual à zero. Vamos definir a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Notação alternativa $u_a(t) = u(t-a)$

Equações com termo não homogêneo descontínuo

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$

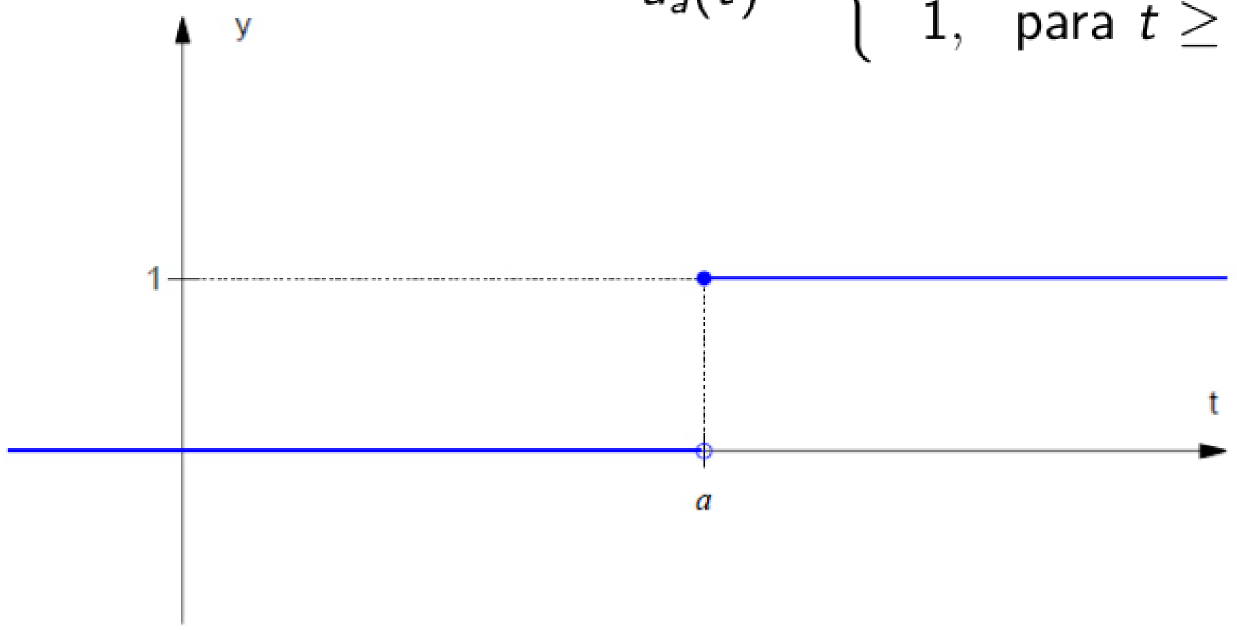


Figura: Função de Heaviside

Transformada de Laplace da função de Heaviside

Exemplo

Vamos calcular a transformada de Laplace da função de Heaviside

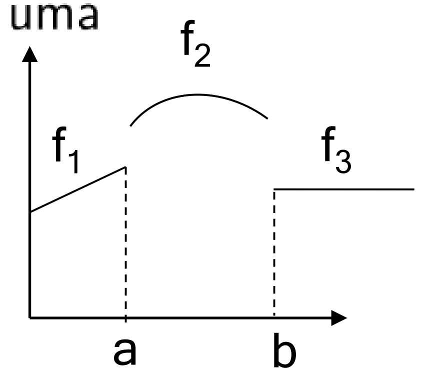
$$f(t) = u_a(t).$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty = 0 - \frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-as}}{s}, \end{aligned}$$

para $s > 0$.

Equações com termo não homogêneo descontínuo

Vamos ver como podemos escrever uma função descontínua dada por três expressões em termos da função de Heaviside. Considere uma função



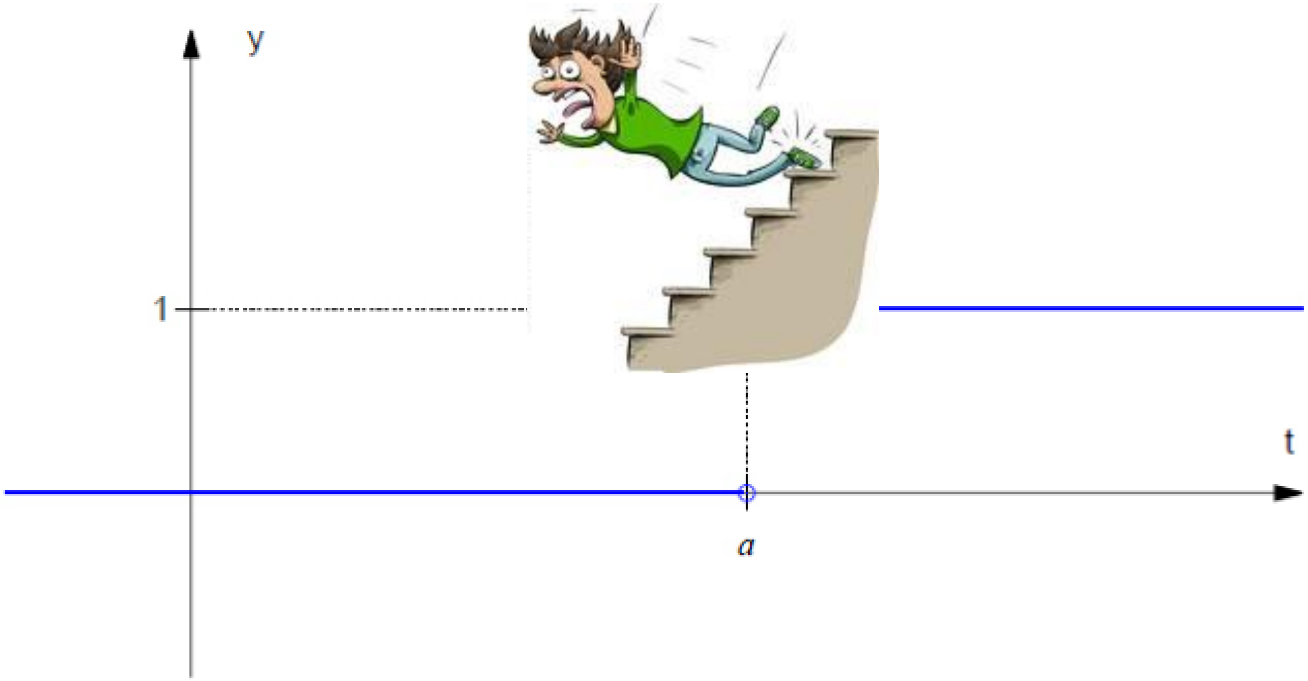
$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \leq t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \geq b \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita como

$$f(t) = f_1(t) - u_a(t)f_1(t) + u_a(t)f_2(t) - u_b(t)f_2(t) + u_b(t)f_3(t).$$

Observe que para "zerar" $f_1(t)$ a partir de $t = a$, subtraímos $u_a(t)f_1(t)$ e para "acrescentar" a partir de $t = a$ somamos $u_a(t)f_2(t)$. Para "zerar" $f_2(t)$ a partir de $t = b$, subtraímos $u_b(t)f_2(t)$ e para "acrescentar" $f_3(t)$ a partir de $t = b$ somamos $u_b(t)f_3(t)$.

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$



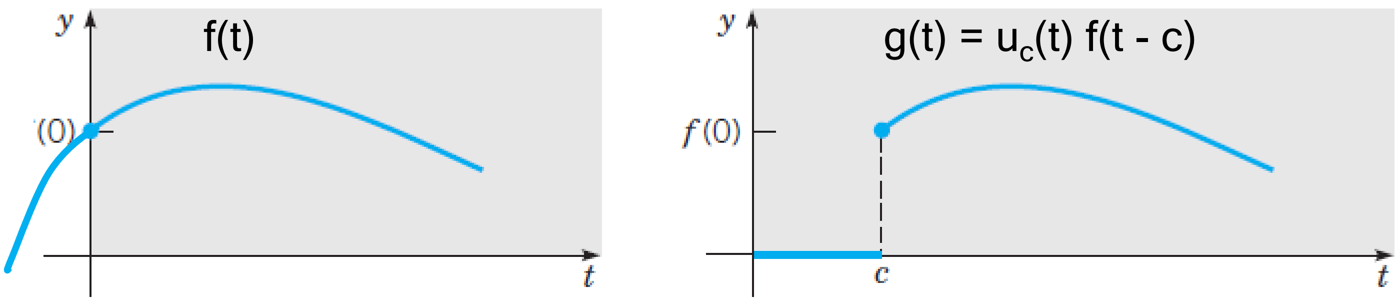
Transformada de Laplace da função de Heaviside

Translação (deslocamento) de f(t) por uma distância c no sentido de t positivos

Para uma função f, definida para t ≥ 0, vamos considerar a função g definida por:

$$y = g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

Em termos da função degrau unitário, g(t) pode ser representada como:



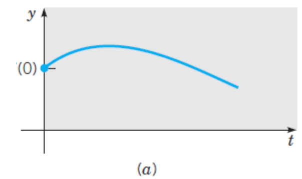
Transformada de Laplace da função de Heaviside

Teorema Translação (deslocamento) em t

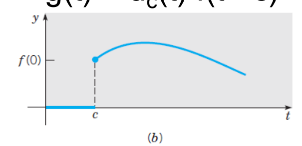
Seja a uma constante positiva. Se a transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é* $F(s)$*, para* $s > c$*, então a transformada de Laplace da função* $g(t) = u_a(t)f(t-a)$ *é*

$$G(s) = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > c.$$

f(t)



g(t) = u_c(t) f(t - c)



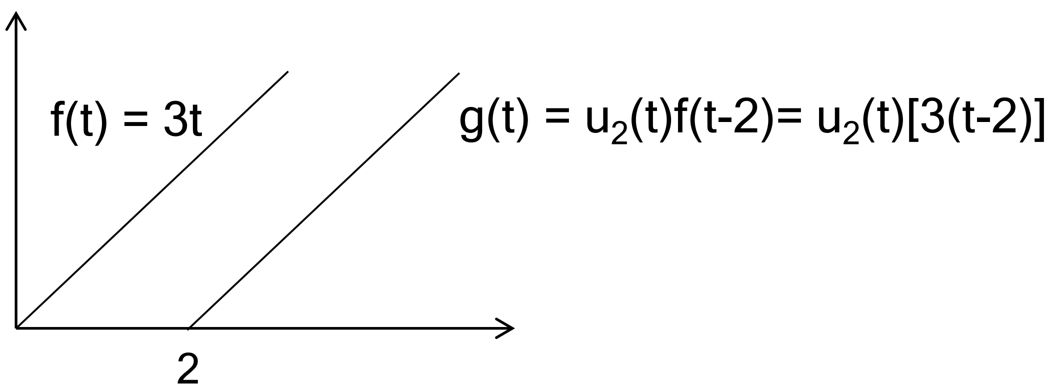
$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}u_a(t)f(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(t+a)}f(t)\,dt = e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = e^{-as}F(s). \end{aligned}$$

Este teorema diz que a translação de f(t) por uma distância *a* no sentido dos t positivos corresponde à multiplicação de F(s) por e^{-as}.

Exemplo

$$L^{-1}\left\{\frac{3e^{-2s}}{s^2}\right\} = u_2(t)\cdot\left[3\left(t-2\right)\right]$$

Neste exemplo a função f(t) = 3t sofreu uma translação de a = 2 no sentido dos t positivos corresponde à multiplicação de F(s) = $3/s^2$ por e^{-2s}.



Teorema Translação (deslocamento) em s

Seja a uma constante. Se a transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é $F(s)$, para $s > c$, então a transformada de Laplace da função $g(t) = e^{at} f(t)$ é

$$G(s) = F(s-a), \quad \textit{para } s > a + c.$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a).$$

Este teorema mostra que a translação da transformada F(s) a uma distância a no sentido dos s positivos corresponde à multiplicação de f(t) por e^{at}

Teorema útil para realizar a transformada inversa de Laplace.

Exemplo

Encontre a transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

Solução

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2)$$

Onde F(s) = $(s^2+1)^{-1}$. Como L^{-1}\{F(s)\} = sen (t). Pelo teorema anterior.

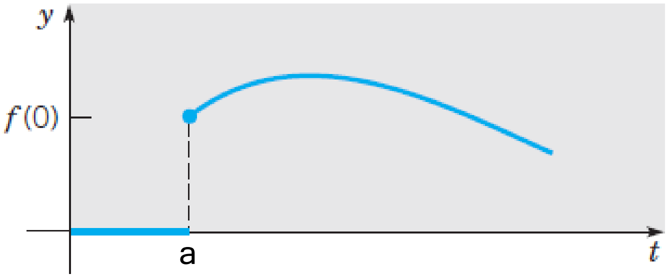
g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = e^{2t} sen(t)

Comparação dos teoremas de deslocamento

Deslocamento em *t*

$$g(t) = u_a(t)f(t-a)$$

$$G(s) = \boxed{e^{-as}}F(s), \quad para\ s > c.$$



Deslocamento em *s*

$$g(t) = \boxed{e^{at}}f(t)$$

$$G(s) = F(s-a), \quad para\ s > a + c.$$

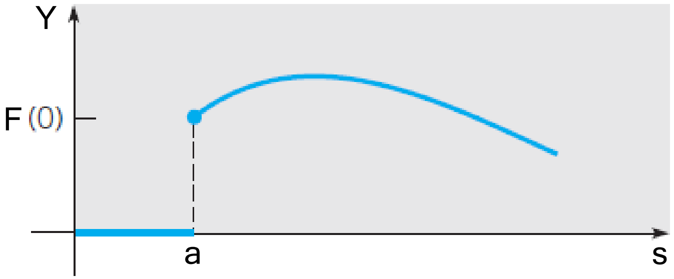


Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n, \quad n =$ positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \|a\|$

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}, \quad n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \qquad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

EDO sob ação de funções descontínuas

Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$2y'' + 2y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

em que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 3 \\ 2, & \text{para } 3 \leq t < 10 \\ 0, & \text{para } t \geq 10. \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 2u_3(t) - 2u_{10}(t).$$

Transformadas de Laplace

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação

$$f(t) = 2u_3(t) - 2u_{10}(t),$$

obtemos

$$2\left(s^2\mathcal{Y}(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2(s\mathcal{Y}(s) - y(0)) + 2\mathcal{Y}(s) = 2\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-10s}}{s}$$

Substituindo os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(2s^2 + 2s + 2\right)\mathcal{Y}(s) = 2\frac{e^{-3s} - e^{-10s}}{s}$$

Assim,

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-10s}}{s(s^2 + s + 1)}.$$

Definindo

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)}.$$

E assim

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-10s}}{s(s^2+s+1)} = (e^{-3s} - e^{-10s})H(s) = e^{-3s}H(s) - e^{-10s}H(s).$$

Depois de encontrar a função $h(t)$ cuja transformada de Laplace é $H(s)$, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = u_3(t)h(t-3) - u_{10}(t)h(t-10).$$

Vamos a seguir encontrar a função $h(t)$ cuja transformada de Laplace é $H(s)$.
Como $s^2 + s + 1$ tem raízes complexas, a decomposição de $H(s)$ em frações parciais é da forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 1}.$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2 + s + 1)$ obtemos

$$1 = A(s^2 + s + 1) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se $s = 0$ obtemos $A = 1$. Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 1 obtemos $B = -1$ e $C = -1$.

Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1/2}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4} \end{aligned}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

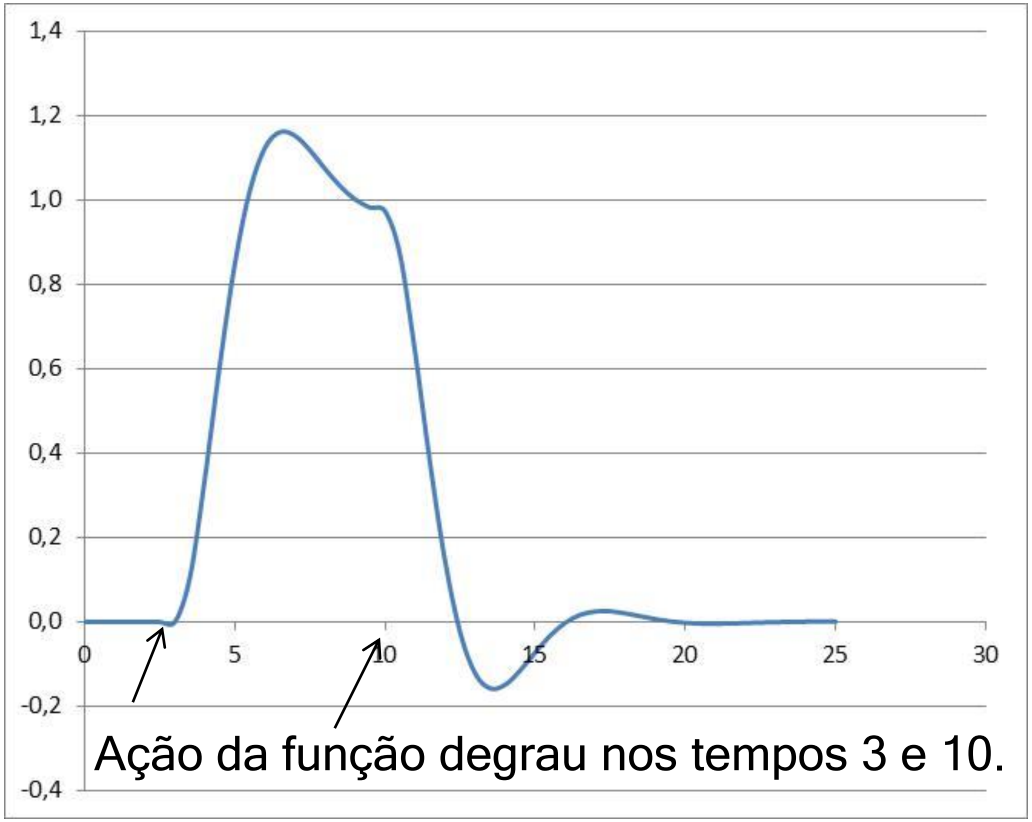
$$h(t) = 1 - e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

e usando o segundo Teorema de Deslocamento temos que a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = u_3(t)h(t-3) - u_{10}(t)h(t-10).$$

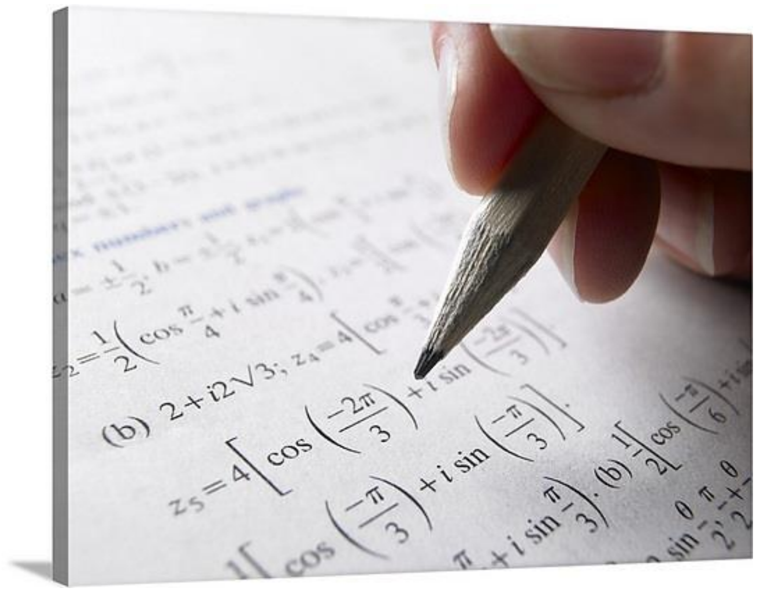
$$y(t) = u_3(t)h(t-3) - u_{10}(t)h(t-10).$$

$$y(t) = u_3(t)\left[1 - e^{-(t-3)/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(t-3)/2}sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)\right] - u_{10}(t)\left[1 - e^{-(t-10)/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-10)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(t-10)/2}sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-10)\right)\right]$$



Lista de exercícios

Lista 10 (Até secção 6.4).



Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; IÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2
- Verdério, A., 2014. Materiais de Aula, Séries e Equações Diferenciais, Universidade Federal de Santa Catarina.

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Para vermos como o método de frações parciais funciona em geral, consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde *P* e *Q* são polinômios. É possível expressar *f* como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de *P* seja menor que o grau de *Q*. Essa função racional é denominada *própria*.

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Lembre-se de que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$, então o grau de P é n e escrevemos $\mathrm{gr}(P) = n$.

Se f for *impróprio*, isto é, $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar, dividindo Q em P (por divisão de polinômios) até o resto $R(x)$ ser obtido com $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$.

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

O resultado da divisão é

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde *S* e *R* também são polinômios.

Como o exemplo a seguir mostra, algumas vezes essa etapa preliminar é tudo que precisamos.

Decomposição em frações parciais

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. É possível demonstrar que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$). Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamos fatorar como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Decomposição em frações parciais

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma das **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

Decomposição em frações parciais

CASO I O denominador $Q(x)$é um produto de fatores lineares distintos.

Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro).

Decomposição em frações parciais

Nesse caso, o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

Exemplo 2

Calcule $$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$$

SOLUÇÃO: Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2).$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando $\boxed{2}$ tem a forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para determinarmos os valores de A, B e C, multiplicamos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, obtendo

$$\boxed{4} \quad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1).$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos

$$\boxed{5} \quad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A.$$

Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente de x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A \qquad\qquad &= -1 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2}$$

Decomposição em frações parciais

OBSERVAÇÃO Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes A, B e C no Exemplo 2. A Equação 4 é uma identidade; é verdadeira para cada valor de x. Vamos escolher valores de x que simplificam a equação. Se colocarmos $x = 0$ na Equação 4, então o segundo e terceiro termos do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$, ou $A = \frac{1}{2}$. Da mesma forma, $x = \frac{1}{2}$ dá $5B/4 = \frac{1}{4}$ e $x = -2$ resulta em $10C = -1$, assim $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$.

Decomposição em frações parciais

CASO II $Q(x)$ é um produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos.

Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes; isto é, $(a_1x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$ na Equação 2, usaríamos

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Para ilustrarmos, poderíamos escrever

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

CASO III $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.

Se $Q(x)$ tiver o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \tag{9}$$

em que A e B são as constantes a serem determinadas.

Decomposição em frações parciais

Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Exemplo 6

Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx.$

SOLUÇÃO: Como o grau do numerador *não é menor que* o grau do denominador, primeiro dividimos e obtemos

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Observe que o quadrático $4x^2 - 4x + 3$ é irredutível, pois seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica de frações parciais.

Para integrarmos a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2.$$

CASO IV $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Se $Q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, em vez de uma única fração parcial $\boxed{9}$, a soma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$. Cada um dos termos $\boxed{11}$ pode ser integrado usando uma substituição ou completando primeiramente o quadrado, se necessário.

Exemplo 8

Calcule $\displaystyle \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

SOLUÇÃO: A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x$$

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$

$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A.$$

Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A + B = 0, \quad C = -1, \quad 2A + B + D = 2, \quad C + E = -1, \quad A = 1,$$

que tem a solução $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 0$.

Decomposição em frações parciais

Links úteis

https://www.youtube.com/watch?v=xzIqeNtOR1s