Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

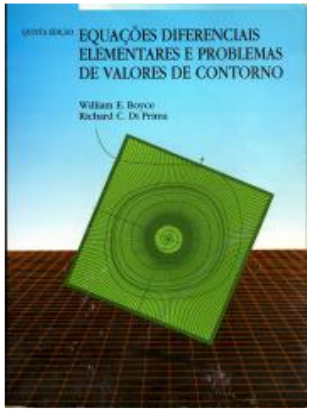
Séries e Equações Diferenciais

Unidade 1

Prof. Diogo Lôndero da Silva

diogolondero.wix.com/seds

Referências bibliográficas

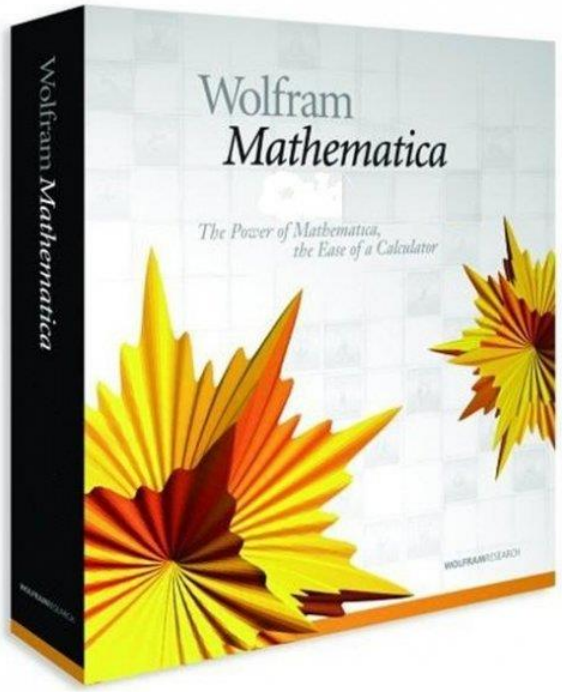


Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno
William E. Boyce & Richard C. Di Prima

Advanced Engineering Mathematics
Erwin Kreyszig

Cálculo V.2
James Stewart

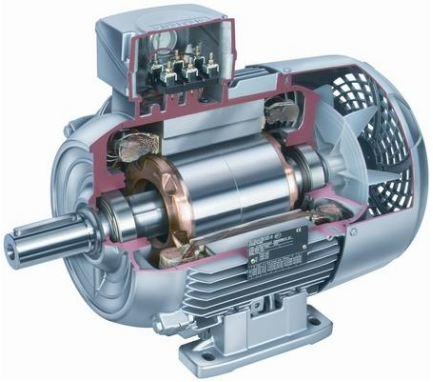
Suporte computacional



Familiarização com softwares capazes de resolver séries e equações diferencias

Introdução – Modelos matemáticos

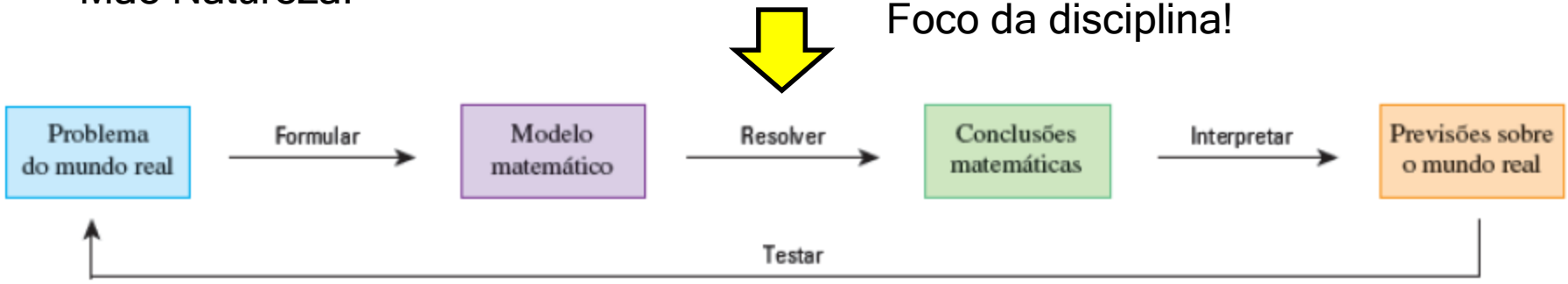
- ✓ Um modelo matemático é a descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real.
- ✓ Exemplos: o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a dinâmica de um sistema massa-mola.
- ✓ O propósito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro.



Introdução – Modelos matemáticos

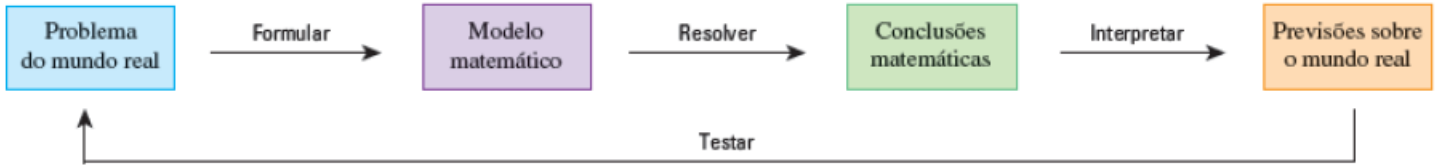
- ✓ Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas.
- ✓ É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Foco da disciplina!

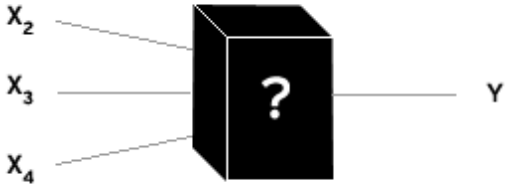


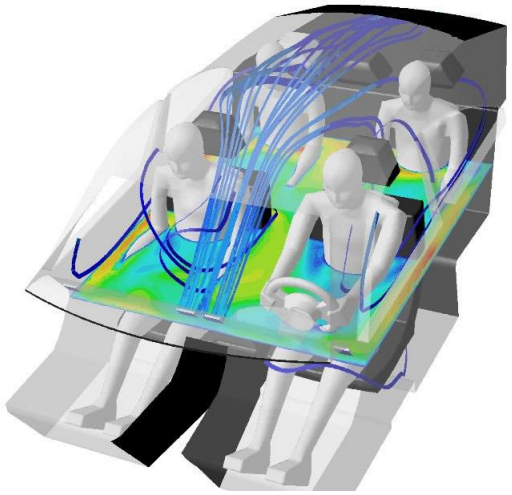
O processo de modelagem

Introdução – Modelos matemáticos



O processo de modelagem

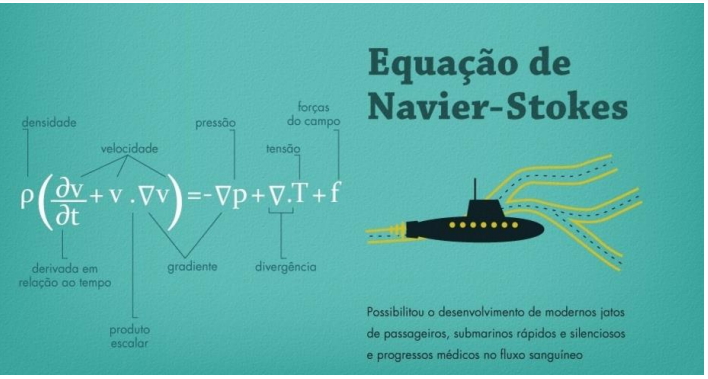


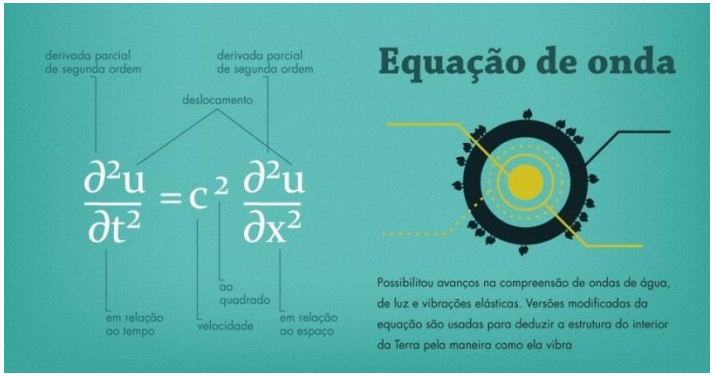


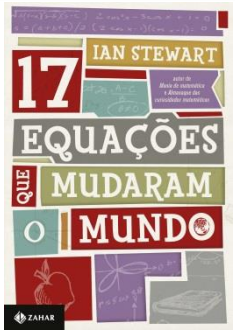
Introdução
Por que devo estudar Equações Diferenciais?

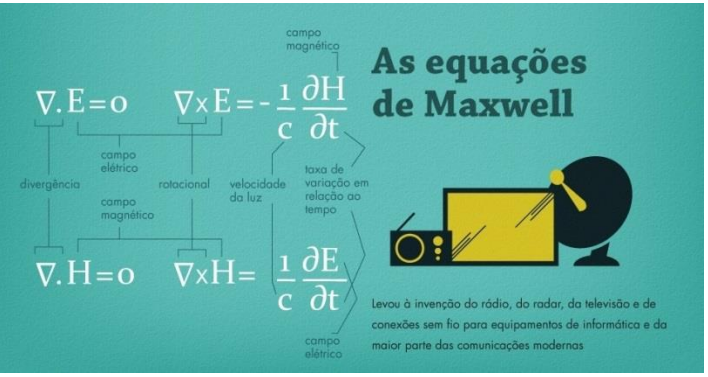
- ✓ As Equações Diferenciais (ED) são uma das mais importantes aplicações do cálculo;
- ✓ Quando engenheiros, cientistas físicos ou cientistas sociais usam cálculo, muitas vezes o fazem para analisar uma ED que tenha surgido no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estejam estudando.
- ✓ O modelo matemático frequentemente tem a forma de uma equação diferencial, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas.
- ✓ Isso não surpreende, porque em um problema real normalmente notamos que mudanças ocorrem e queremos predizer o comportamento futuro com base na maneira como os valores presentes variam.

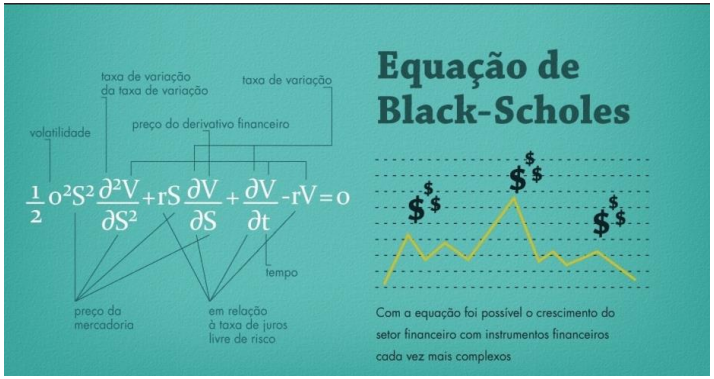
Introdução
Por que devo estudar Equações Diferenciais?

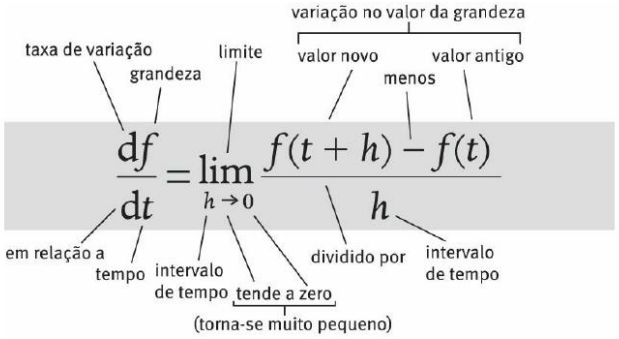


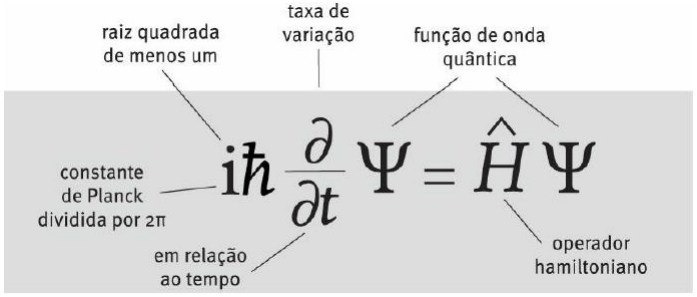


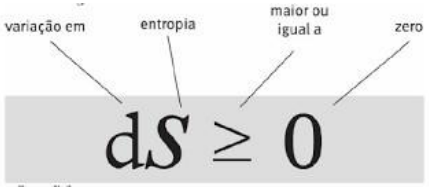




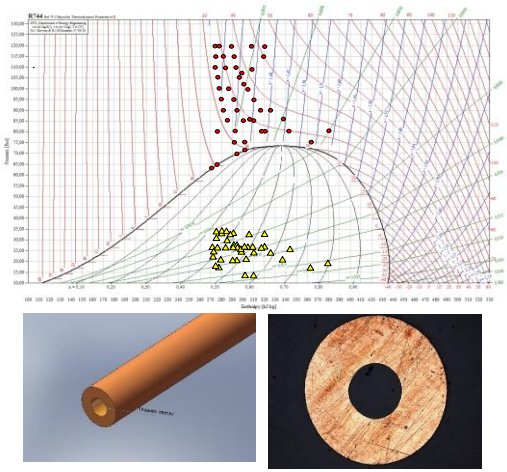








Introdução
Por que devo estudar Equações Diferenciais?

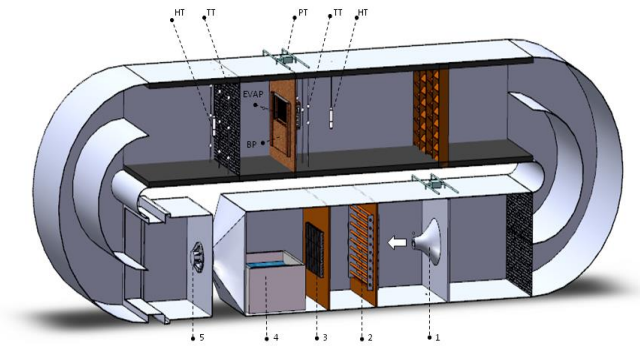


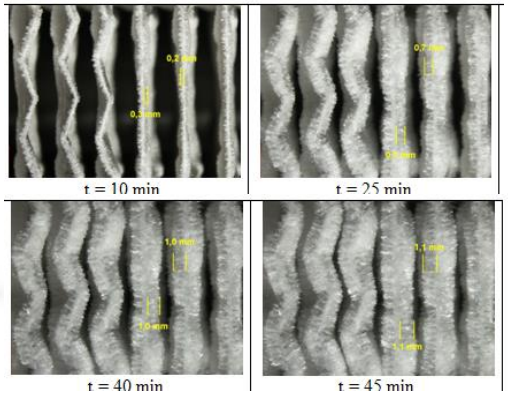
$$G = cte$$

$$G^2 dv + dp + \frac{4}{D}\tau dz = 0$$

$$dh + G^2 v dv = 0$$

$$dv = \psi dp + \phi dh$$





$$\left(\frac{D_{ab}\varepsilon}{\tau}\right)\frac{d^2\omega}{dx^2} = \lambda\omega$$

$$k_g \frac{d^2T}{dx^2} = -\lambda L \rho_{ar,\infty}\omega_{sat,e}\cosh\left(\sqrt{\frac{\lambda\tau}{D_{ab}\varepsilon}}x\right)$$

Introdução – Equações Diferenciais

Definição: Tratam-se de equações envolvendo uma **função** incógnita (y) e suas derivadas ($y^{(n)}$), além de variáveis independentes (x_1, x_2, x_n).

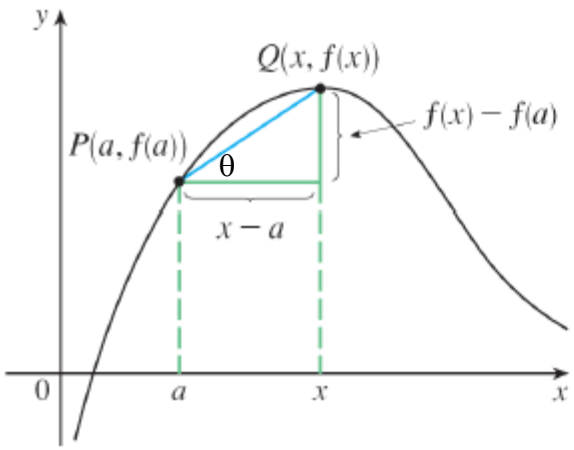
Exemplos:

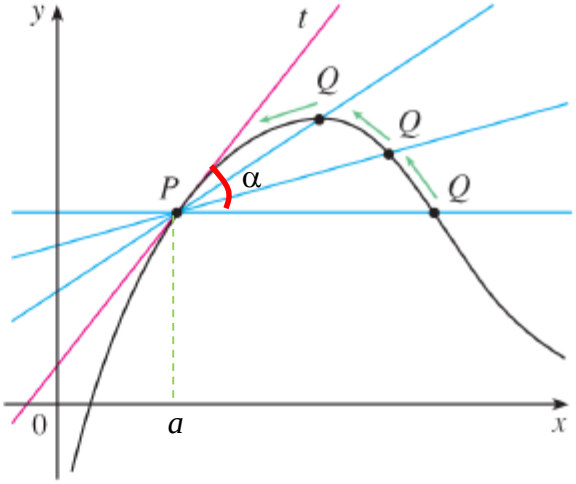
- y'=cos(x)
- y''+4y=0
- $x^2y'''y' + 2e^xy'' = (x^2+2)y^2$
- $u_t+u_{xx}=0$ (esta notação indica derivadas parciais sendo que u=f(t,x))
- Notação de Leibniz $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Introdução – Equações Diferenciais

✓ Conceito de derivada

Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente* t como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Veja a Figura 1.)





$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Secante

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tangente

$$tg\alpha = m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$$

Introdução – Equações Diferenciais

✓ Conceito de derivada

- *Interpretação geométrica*: A derivada é igual à inclinação da função em um dado ponto. Ela também corresponde ao coeficiente angular (m) da reta tangente.

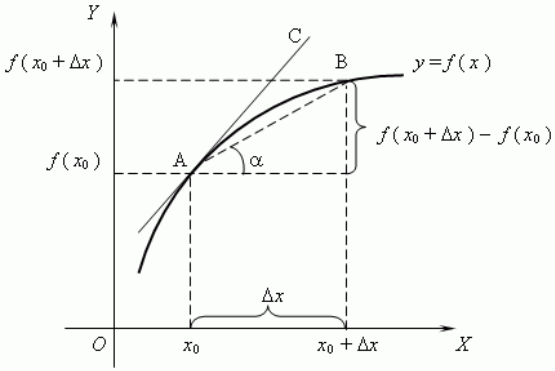


Fig. 1

$$y = mx + b$$

m = coeficiente angular
b = intersecção com eixo y

$$m = tg\alpha = y'(a) = \lim_{x \to a} \frac{y(x) - y(a)}{x - a}$$

- *Interpretação como taxa de variação*: A derivada é igual à taxa instantânea de variação de y em relação a x:

$$y'(a) = \lim_{x \to a} \frac{y(x) - y(a)}{x - a}$$

Neste caso a derivada possui unidades físicas!

Introdução – Equações Diferenciais

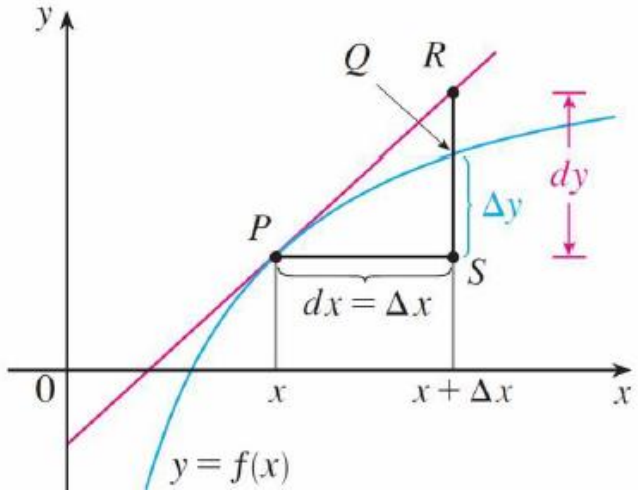
✓ Conceito de diferenciais: são a representação de pequenas diferenças

O incremento Δx da variável independente x pode ser representado por dx, que é denominado diferencial de x. Então o diferencial da variável dependente dy é definido como:

$$dy = y'(x)\,dx$$

Para n variáveis independentes

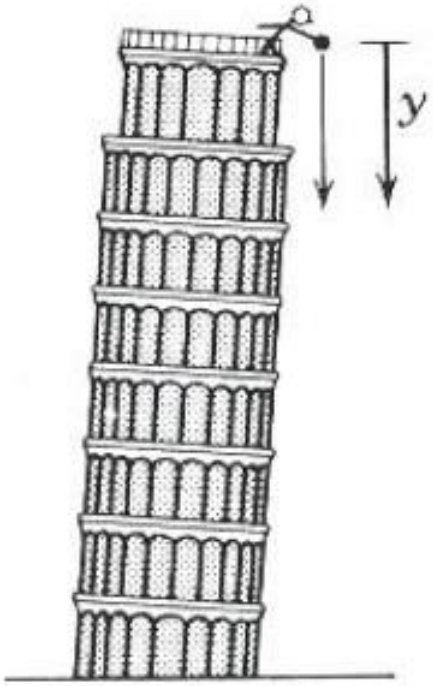
$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$



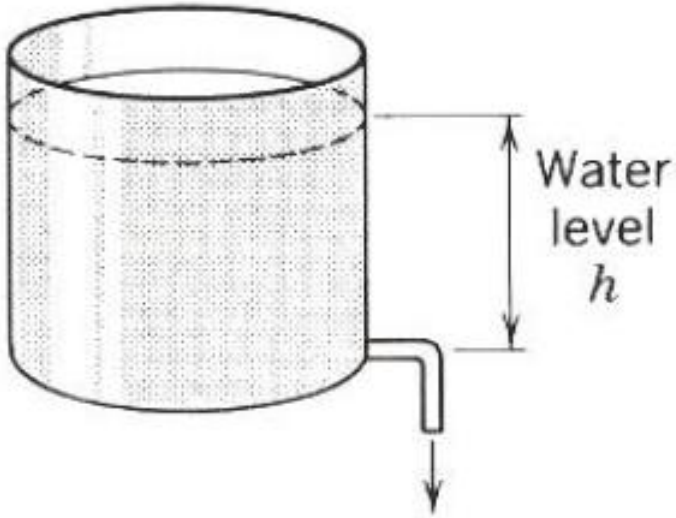
Observe que dx=Δx, mas o diferencial dy não é necessariamente igual ao incremento Δy.
Os diferenciais fornecem ótimas aproximações do valor da função y(x) para pequenos incrementos Δx. Tais aproximações são denominadas aproximações lineares de y(x).

Introdução – Equações Diferenciais

Aplicações



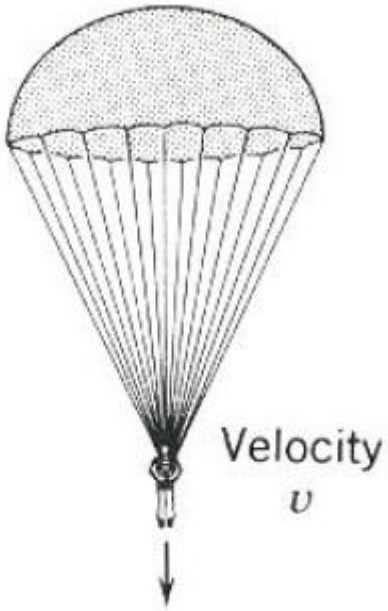
Falling stone
$y'' = g = \text{const}$



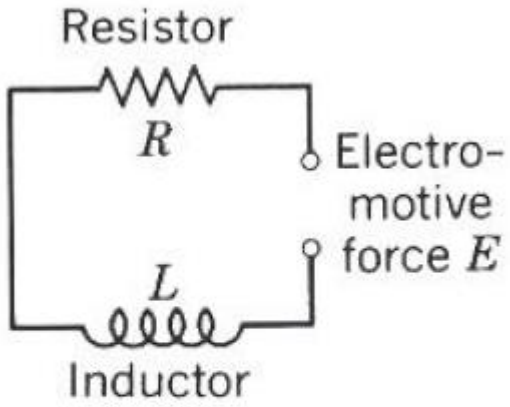
Outflowing water
$h' = -k\sqrt{h}$

Introdução – Equações Diferenciais

Aplicações



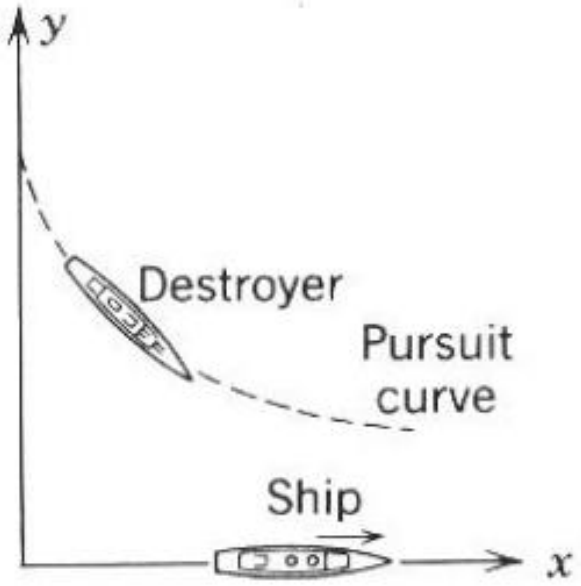
Parachutist
$mv' = mg - bv^2$



Current I in an
RL – circuit
$LI' + RI = E$

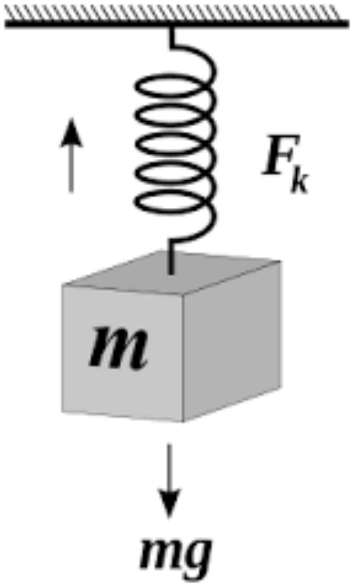
Introdução – Equações Diferenciais

Aplicações



Pursuit problem

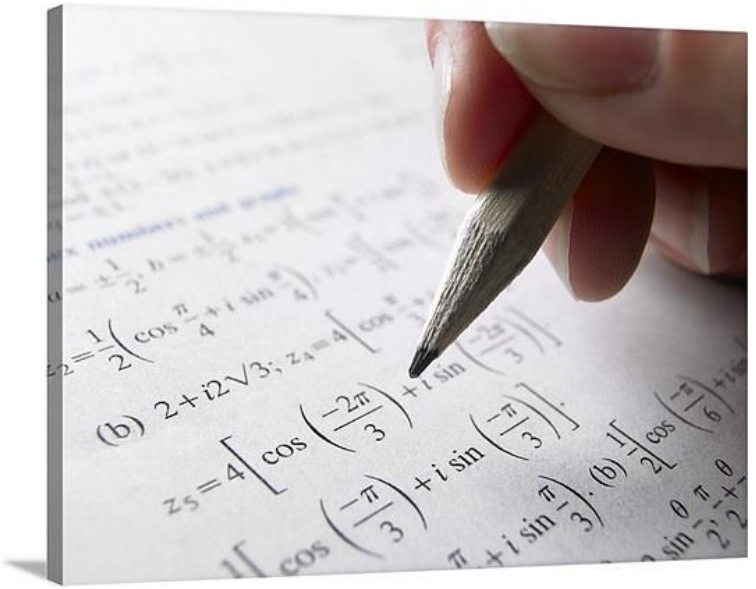
$$y' = y/\sqrt{a^2 - y^2}$$



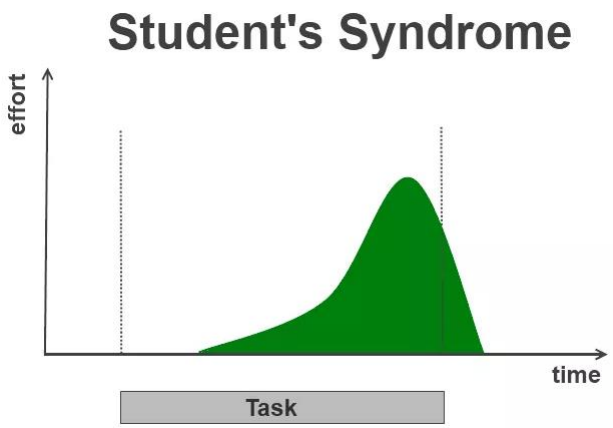
Lista de exercícios

Conteúdo

- ✓ Verificação de conceitos;
- ✓ Resolução de problemas;
- ✓ Material complementar online;



.



Critical Chain - Eliyahu Goldratt

Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; IÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

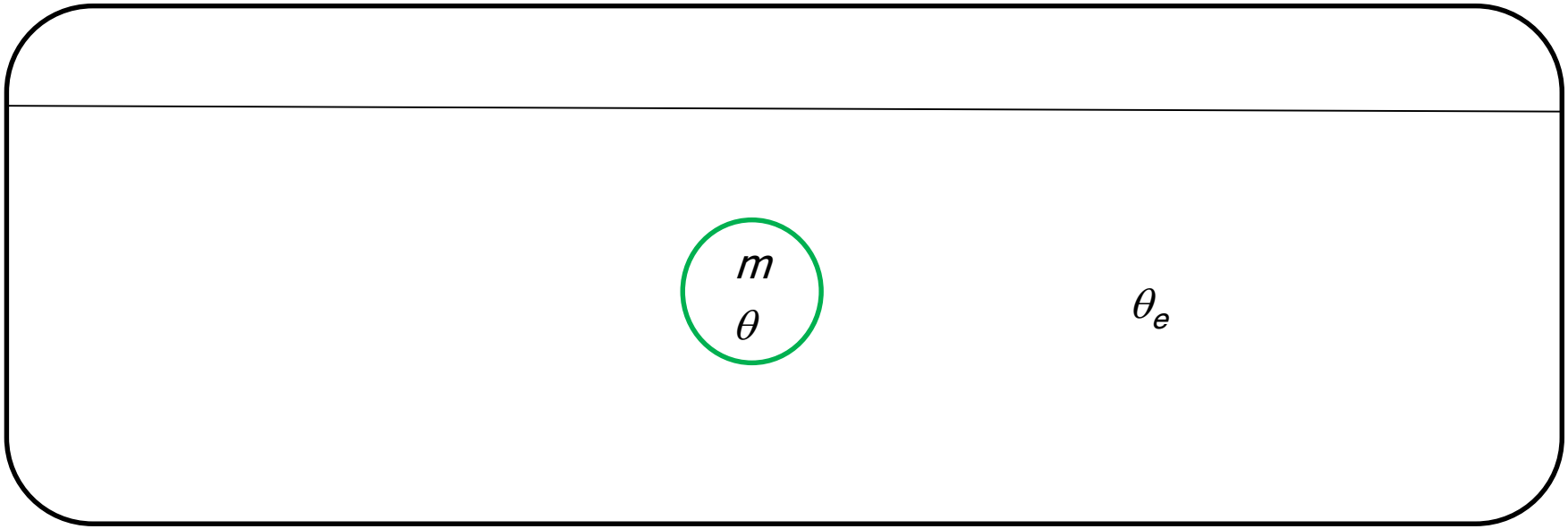
Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.

Introdução – Equações Diferenciais

Exemplo

Encontre uma função que permita calcular a temperatura θ em função do tempo da massa m que está imersa em um meio de temperatura θ_e.



Introdução – Equações Diferenciais

Exemplo:

Encontre uma função que permita calcular a temperatura θ em função do tempo da massa m que está imersa em um meio de temperatura θ_e.

Conclusões:

Uma equação diferencial que representa um fenômeno físico deve apresentar consistência de unidades;

A solução de uma ED é uma família de funções;

Ao resolver uma ED estamos interessados no entendimento do fenômeno e não somente em valor específico.

A solução específica é obtida somente através de condições de contorno ou condições iniciais;