



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 6

Equações Diferenciais de Segunda Ordem não homogêneas

Prof. Diogo Lôndero da Silva



Sumário

Equações lineares de segunda ordem **não homogêneas** com coeficientes constantes

1. Método dos coeficientes indeterminados;
2. Método das variações de parâmetros;



Equações de segunda ordem não homogêneas



Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Nesta seção, aprenderemos a resolver equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes, isto é, equações da forma

$$1 \quad ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde a , b e c são constantes e G é uma função contínua. A equação homogênea correspondente

$$2 \quad ay'' + by' + cy = 0$$

é chamada **equação complementar** e desempenha um papel importante na solução da equação não homogênea original [1].



Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

3 Teorema A solução geral da equação diferencial não homogênea [1] pode ser escrita como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

onde y_p é uma solução particular da Equação 1 e y_c é a solução geral da Equação complementar 2.

Existem dois métodos para encontrar uma solução particular: O método dos coeficientes indeterminados é simples, mas funciona apenas para uma classe restrita de funções G . O método de variação de parâmetros funciona para todas as funções G , mas, geralmente, é mais difícil de aplicar na prática.



Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

3 Teorema A solução geral da equação diferencial não homogênea **1** pode ser escrita como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

onde y_p é uma solução particular da Equação 1 e y_c é a solução geral da Equação complementar 2.

Para determinação das constantes, a substituição das condições iniciais e condições de contorno deve ser feita na solução geral.

Não utilize apenas a y_c para obter as constantes!



Método dos coeficientes indeterminados



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Vamos primeiro ilustrar o método dos coeficientes indeterminados para a equação

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde $G(x)$ é um polinômio. É razoável prever que exista uma solução particular y_p que seja um polinômio de mesmo grau de G , pois, se y for um polinômio, então $ay'' + by' + cy$ também é um polinômio. Portanto, substituímos $y_p(x) = a$, um polinômio (de mesmo grau de G), na equação diferencial e determinamos os coeficientes.



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Resolva a equação $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ é

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

com raízes $r = 1, -2$. Logo, a solução da equação complementar é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Uma vez que $G(x) = x^2$ é um polinômio de grau 2, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Então, $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$. Assim, substituindo na equação diferencial dada, temos

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

ou
$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais.



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Assim,

$$\begin{aligned} -2A &= 1 & 2A - 2B &= 0 & 2A + B - 2C &= 0 \end{aligned}$$

A solução desse sistema de equações é

$$A = -\frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = -\frac{3}{4}$$

Uma solução particular é, portanto,

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

e, pelo Teorema 3, a solução geral é

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Resolva $y'' + y' - 2y = \sin x$.

SOLUÇÃO: Tentemos uma solução particular

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x$$

Então, $y_p' = -A \sin x + B \cos x$ $y_p'' = -A \cos x - B \sin x$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

logo, substituindo na equação diferencial, temos

$$(-A \cos x - B \sin x) + (-A \sin x + B \cos x) - 2(A \cos x + B \sin x) = \sin x$$

ou

$$(-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x = \sin x$$

Isso acontece se

$$-3A + B = 0 \quad \text{e} \quad -A - 3B = 1$$

A solução deste sistema é

$$A = -\frac{1}{10} \quad B = -\frac{3}{10}$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

logo, uma solução particular é

$$y_p(x) = -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$

No Exemplo 1, determinamos que a solução da equação complementar é $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$. Assim, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{10} (\cos x + 3 \sin x)$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Se $G(x)$ for um produto de funções dos tipos precedentes, então tentamos a solução como um produto de funções do mesmo tipo. Por exemplo, ao resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x \cos 3x$$

tentamos

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Se $G(x)$ for uma soma de funções desses tipos, usamos o *princípio da superposição*, que é facilmente verificável e nos diz que, se y_{p_1} e y_{p_2} forem soluções de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \quad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, então $y_{p_1} + y_{p_2}$ é uma solução de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Resumo do Método dos Coeficientes Indeterminados

1. Se $G(x) = e^{kx}P(x)$, onde P é um polinômio de grau n , então tente $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de n -ésimo grau (cujos coeficientes são determinados através da substituição na equação diferencial).
2. Se $G(x) = e^{kx}P(x) \cos mx$ ou $G(x) = e^{kx}P(x) \sin mx$, onde P é um polinômio de n -ésimo grau, então tente

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x) \cos mx + e^{kx}R(x) \sin mx$$

onde Q e R são polinômios de grau n -ésimo.

Modificação: Se algum termo de y_p for uma solução da equação complementar, multiplique y_p por x (ou por x^2 se necessário).



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Term in $r(x)$	Choice for $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
kx^n ($n = 0, 1, \dots$)	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$	$\left. \begin{array}{l} k \sin \omega x \end{array} \right\} K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$	$\left. \begin{array}{l} ke^{\alpha x} \sin \omega x \end{array} \right\} e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$
$ke^{\alpha x} \sin \omega x$	

Esta tabela também pode ser empregada para determinar a forma da solução particular

- **Regra básica:** Proponha um y_p com base na forma da função $r(x)$. Substitua esta função na E.D.O de modo a achar os coeficientes indeterminados.
- **Modificação:** Caso a função proposta for solução da homogênea multiplicar esta função por x . Caso essa também seja multiplicar novamente por x .
- **Soma:** Caso $r(x)$ seja uma soma, somar as soluções correspondentes



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Determine a forma da solução tentativa para a equação diferencial $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x$.

SOLUÇÃO: Aqui $G(x)$ tem a forma encontrada na parte 2 do resumo, onde $k = 2$, $m = 3$ e $P(x) = 1$. Assim, à primeira vista, a forma da solução tentativa deveria ser

$$y_p(x) = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

Mas a equação auxiliar é $r^2 - 4r + 13 = 0$, com raízes $r = 2 \pm 3i$, portanto a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Isso significa que temos de multiplicar a solução tentativa sugerida por x .

Então, em vez disso, usamos

$$y_p(x) = xe^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

Neste caso, sugere-se o uso de um sistema de computação algébrica para obtenção da solução.



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Empregando o Maple para obter as derivadas

$y(x) = e^{2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x))$

$$x e^{2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x))$$

differentiate w.r.t. x

$$e^{2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x)) + 2x e^{2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x)) + x e^{2x} (-3A \sin(3x) + 3B \cos(3x))$$

differentiate w.r.t. x

$$4 e^{2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x)) + 2 e^{2x} (-3A \sin(3x) + 3B \cos(3x)) + 4x e^{2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x)) + 4x e^{2x} (-3A \sin(3x) + 3B \cos(3x)) + x e^{2x} (-9A \cos(3x) - 9B \sin(3x))$$

Resolvendo o sistema: $A = 1/18$; $B = 3/18$

Obtem-se a seguinte solução geral

$$y(x) = e^{2x} \sin(3x) _C2 + e^{2x} \cos(3x) _C1 + \frac{1}{18} e^{2x} (3 \sin(3x) x + \cos(3x))$$



O Método das Variações dos Parâmetros



Equações lineares de segunda ordem

Método das variações dos parâmetros

Teorema

Se as funções p , g e q são contínuas em um intervalo aberto I e se as funções y_1 e y_2 são soluções LI da equação homogênea associada à equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

Então uma solução particular é

$$Y(t) = -y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds,$$

Onde t_0 é qualquer ponto em I escolhido convenientemente e W é o Wronskiano.

A solução geral é

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t),$$



Equações lineares de segunda ordem

Método das variações dos parâmetros

Resolva a equação $y'' + y = \operatorname{tg} x$, $0 < x < \pi/2$.

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t),$$

Solução complementar

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x.$$

$$Y(t) = -y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds,$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{vmatrix} = -1$$



Equações lineares de segunda ordem

Método das variações dos parâmetros



$$-y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds = -\sin(s) \cos(s) \Big|_0^t = -\sin(t) \cos(t)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds &= \cos(t) \left[\sec(t) - \ln(\sin(t) + tg(t)) \right] \Big|_0^t \\ &= \cos(t) \left[\sec(t) - \ln(\sin(t) + tg(t)) \right] \end{aligned}$$

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t),$$

$$y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) - \cos(t) \ln[\sin(t) + tg(t)]$$



Aplicações: Vibrações forçadas



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Suponha que, em adição à força restauradora e à força de amortecimento, o movimento da massa presa à mola seja afetado pela força externa $F(t)$. Então, a Segunda Lei de Newton fornece

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \text{força restauradora} + \text{força de amortecimento} + \text{força externa} \\ &= -kx - c \frac{dx}{dt} + F(t) \end{aligned}$$

Assim, em lugar da equação homogênea [3], o movimento da massa é agora governado pela seguinte equação diferencial não homogênea:

5

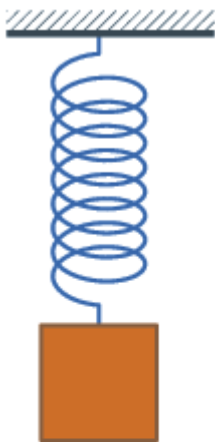
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Massa mola não amortecido



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

0

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t)$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Uma força externa que ocorre comumente é uma função força periódica

ω_0 - Frequência natural

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{onde} \quad \omega \neq \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Nesse caso, e na falta de uma força de amortecimento ($c = 0$), pede-se que você use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que

$$\boxed{6} \quad x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

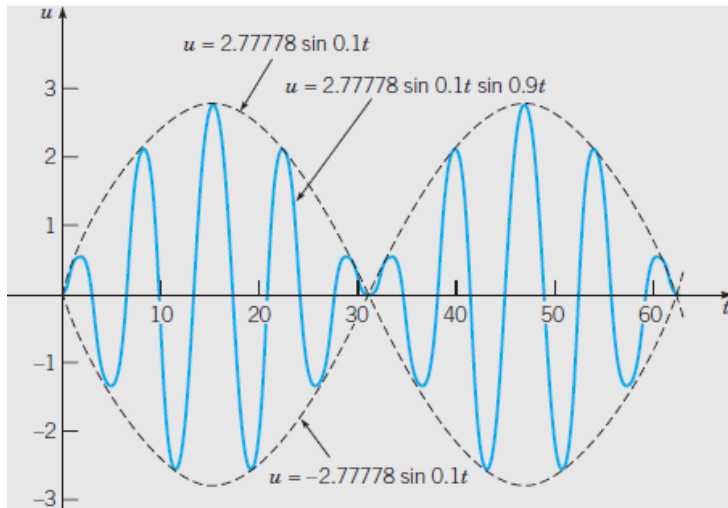
Se $\omega_0 = \omega$, então a frequência aplicada reforça a frequência natural e o resultado são vibrações de grande amplitude. Esse é o fenômeno da **ressonância**.



Equações lineares de segunda ordem

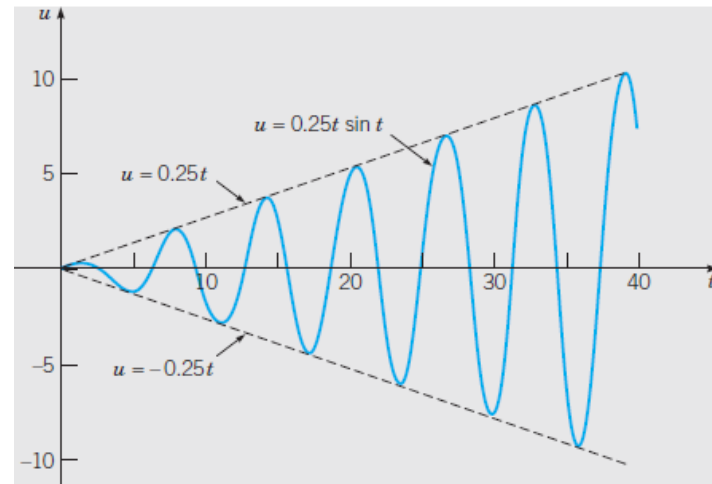
Aplicações

Massa mola não amortecido



Batimento

$$\omega \rightarrow \omega_0$$



Ressonância

$$\omega = \omega_0$$

Amplitude tende ao infinito

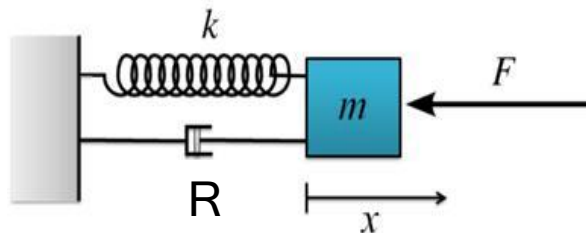
<https://www.youtube.com/watch?v=pRpN9uLioul>



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Massa mola amortecido

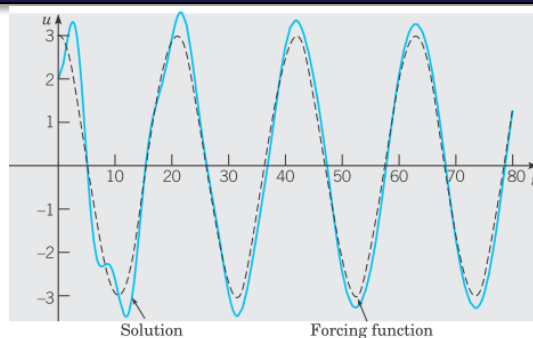
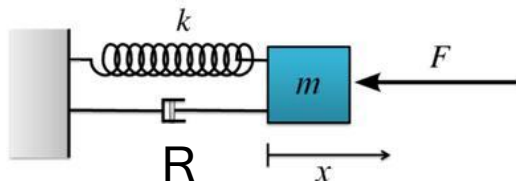


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações (Massa mola amortecido)

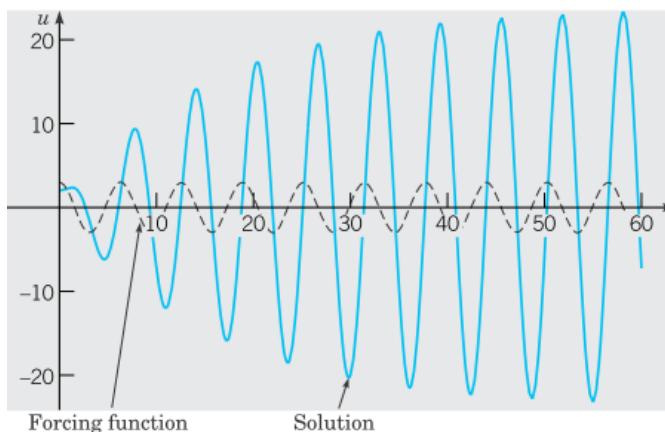


⇒ Força externa aplicada a uma frequência menor que a do sistema

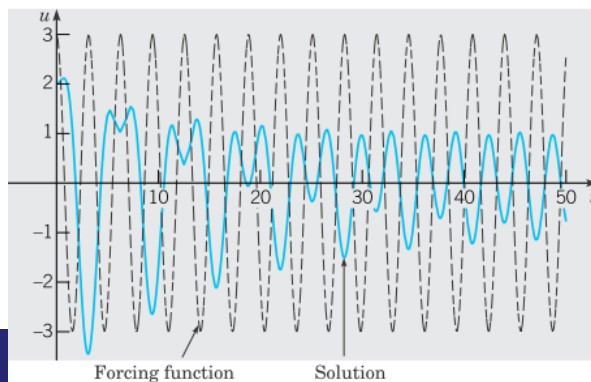
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Frequência do sistema

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



⇒ Força externa aplicada na “mesma” frequência que a do sistema.
(Ressonância)



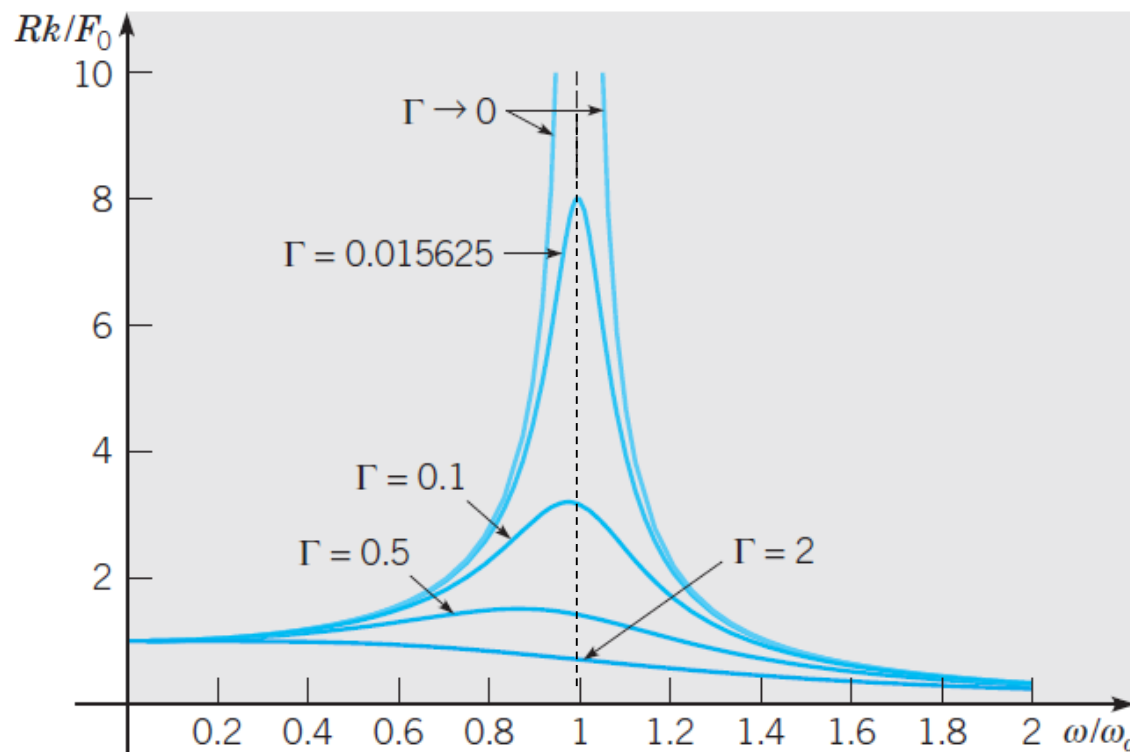
⇒ Força externa aplicada a uma frequência maior que a do sistema



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Massa mola amortecido



$$R = \frac{F_0}{\Delta}, \quad \cos \delta = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad \sin \delta = \frac{\gamma \omega}{\Delta},$$

$$\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad \text{and} \quad \omega_0^2 = k/m.$$

m - massa

k - constante da mola

γ - constante do amortecedor

3.8.2 Forced vibration with damping: amplitude of steady state response versus frequency of driving force; $\Gamma = \gamma^2/mk$.



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações



<http://salfordacoustics.co.uk/sound-waves/oscillation/more-on-damping>



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Conclusões

- Quando $\omega = \omega_0$ no sistema massa mola o deslocamento tende ao infinito ;
- Quando $\omega = \omega_0$ no sistema massa mola amortecido o deslocamento é amplificado mas permanece limitado, não tendo necessariamente um máximo nesta condição;
- No sistema massa mola amortecido com valor de $R^2/(mk)$ pequenos, observam-se grandes deslocamentos quando $\omega \rightarrow \omega_0$. É importante considerar este fato durante um projeto.





Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Aplicações: Mecânica dos Sólidos



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Mecânica dos Sólidos e Concreto Armado II - Flambagem de uma coluna.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI} \right) v = 0$$

$$v = C_1 \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right)$$

C_1 e C_2 são obtidas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna.

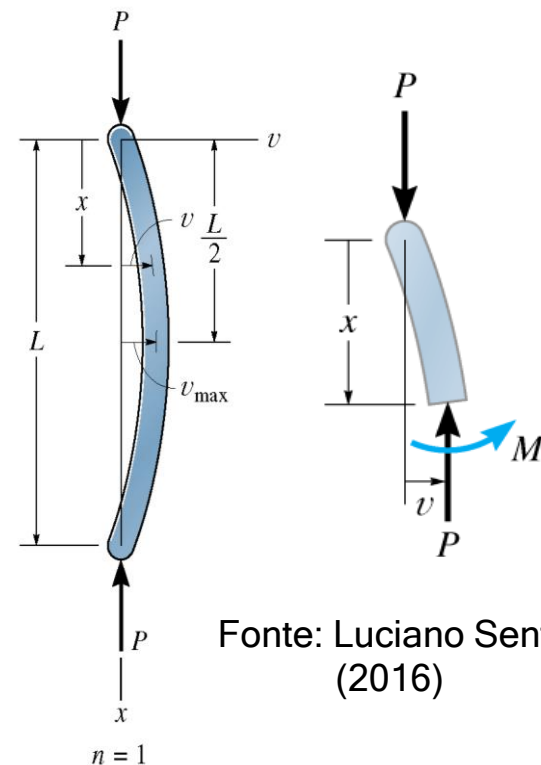
- Para $x = 0$, $v = 0$, então $C_2 = 0$

- Para $x = L$, $v = 0$, então $C_1 \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$

Fazendo,

$$\operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi \Rightarrow \boxed{P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

n é o número de ondas. Obtém-se o menor valor de P com $n=1$, que equivale ao primeiro modo onde o deslocamento é maior.



Fonte: Luciano Senff
(2016)



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Aplicações: Circuitos elétricos



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Anteriormente, usamos equações lineares e separáveis de primeira ordem para analisar circuitos elétricos que contêm resistor e indutor ou um resistor e um capacitor. Agora que sabemos como resolver equações lineares de segunda ordem, estamos em posição de analisar o circuito mostrado na Figura 7.

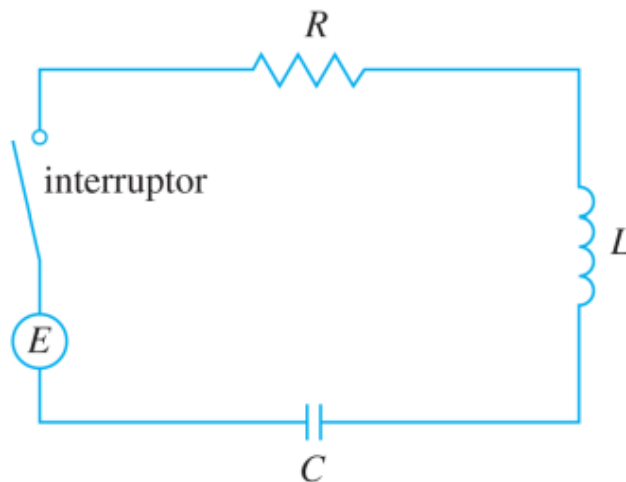


Figura 7



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Figura que contém uma força eletromotriz E (proporcionada pela pilha ou gerador), um resistor R , um indutor L e um capacitor C , em série. Se a carga no capacitor no instante t é $Q = Q(t)$, então a corrente é a taxa de variação de Q em relação a t : $I = dQ/dt$. É sabido da física que as quedas de voltagem no resistor, indutor e capacitor são dadas por

$$RI \quad L \frac{dI}{dt} \quad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. A lei de voltagem de Kirchhoff diz que a soma destas quedas de voltagem é igual à voltagem fornecida:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Uma vez que $I = dQ/dt$, essa equação se torna

7

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Se a carga Q_0 e a corrente I_0 forem conhecidas no instante 0, então temos as condições iniciais

$$Q(0) = Q_0 \quad Q'(0) = I(0) = I_0$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Uma equação diferencial para a corrente pode ser obtida derivando-se a Equação 7 em relação a t e lembrando que $I = dQ/dt$:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E'(t)$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Determine a carga e a corrente no instante t no circuito da Figura 7 se $R = 40 \, \Omega$, $L = 1 \, \text{H}$, $C = 16 \times 10^{-4} \, \text{F}$, $E(t) = 100 \cos 10t$, e a carga e a corrente inicial forem ambas 0.

SOLUÇÃO: Com os valores dados de L , R , C e $E(t)$, a Equação 7 torna-se

8

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 40 \frac{dQ}{dt} + 625Q = 100 \cos 10t$$



Equações lineares de segunda ordem

Método dos coeficientes indeterminados

Equações lineares de segunda ordem não homogêneas com coeficientes constantes

Term in $r(x)$	Choice for $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
kx^n ($n = 0, 1, \dots$)	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$	$\left. \begin{array}{l} k \sin \omega x \end{array} \right\} K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$	$\left. \begin{array}{l} ke^{\alpha x} \sin \omega x \end{array} \right\} e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$
$ke^{\alpha x} \sin \omega x$	

Esta tabela também pode ser empregada para determinar a forma da solução particular

- **Regra básica:** Proponha um y_p com base na forma da função $r(x)$. Substitua esta função na E.D.O de modo a achar os coeficientes indeterminados.
- **Modificação:** Caso a função proposta for solução da homogênea multiplicar esta função por x . Caso essa também seja multiplicar novamente por x .
- **Soma:** Caso $r(x)$ seja uma soma, somar as soluções correspondentes



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

A equação auxiliar é $r^2 + 40r + 625 = 0$ com raízes

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

de modo que a solução da equação complementar é

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t)$$

Para o método dos coeficientes indeterminados, tentamos a solução particular

$$Q_p(t) = A \cos 10t + B \sin 10t$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Então $Q_p'(t) = -10A \operatorname{sen} 10t + 10B \cos 10t$

$$Q_p''(t) = -100A \cos 10t - 100B \operatorname{sen} 10t$$

Substituindo na Equação 8, temos

$$\begin{aligned} (-100A \cos 10t - 100B \operatorname{sen} 10t) + 40(-10A \operatorname{sen} 10t + 10B \cos 10t) \\ + 625(A \cos 10t + B \operatorname{sen} 10t) = 100 \cos 10t \end{aligned}$$

Ou $(525A + 400B) \cos 10t + (-400A + 525B) \operatorname{sen} 10t = 100 \cos 10t$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Igualando os coeficientes, temos

$$525A + 400B = 100$$

$$21A + 16B = 4$$

ou

$$-400A + 525B = 0$$

$$-16A + 21B = 0$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

A solução deste sistema é $A = \frac{84}{697}$ e $B = \frac{64}{697}$, logo, uma solução particular é

$$Q_p(t) = \frac{1}{697} (84 \cos 10t + 64 \sin 10t)$$

e a solução geral é

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t)$$

$$= e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t) + \frac{4}{697} (21 \cos 10t + 16 \sin 10t)$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Impondo a condição inicial $Q(0) = 0$, obtemos

$$Q(0) = c_1 + \frac{84}{697} = 0 \quad c_1 = -\frac{84}{697}$$

Para impormos a outra condição inicial, primeiro vamos derivar para determinar a corrente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t} [(-20c_1 + 15c_2) \cos 15t + (-15c_1 - 20c_2) \sin 15t] \\ + \frac{40}{697} (-21 \sin 10t + 16 \cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \frac{640}{697} = 0 \quad c_2 = -\frac{464}{2091}$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Assim, a fórmula para a carga é

$$Q(t) = \frac{4}{697} \left[\frac{e^{-20t}}{3} (-63 \cos 15t - 116 \sin 15t) + (21 \cos 10t + 16 \sin 10t) \right]$$

e a expressão para a corrente é

$$I(t) = \frac{1}{2091} [e^{-20t} (-1\,920 \cos 15t + 13\,060 \sin 15t) + 120 (-21 \sin 10t + 16 \cos 10t)]$$



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

OBSERVAÇÃO 1 No Exemplo 3 a solução para $Q(t)$ consiste em duas partes. Uma vez que $e^{-20t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e tanto $\cos 15t$ como $\sin 15t$ são funções limitadas,

$$Q_c(t) = \frac{4}{2091} e^{-20t} (-63 \cos 15t - 116 \sin 15t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

Logo, para valores grandes de t ,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \frac{4}{697} (21 \cos 10t + 16 \sin 10t)$$

e, por essa razão, $Q_p(t)$ é denominada **solução estacionária**.



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

A Figura 8 mostra uma comparação entre o gráfico de Q a nesse caso e a solução estacionária.

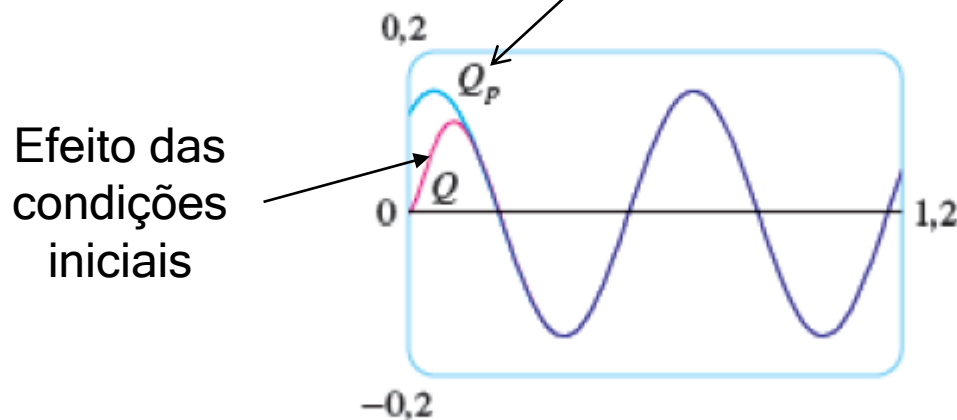


FIGURA 8



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

$$5 \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$7 \quad L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

OBSERVAÇÃO 2 Comparando as Equações 5 e 7, vemos que matematicamente elas são idênticas. Isso sugere a analogia dada na tabela a seguir entre situações físicas que, à primeira vista, são muito diferentes.

Sistema de molas		Circuito Elétrico	
x	deslocamento	Q	carga
dx/dt	velocidade	$I = dQ/dt$	corrente
m	massa	L	indutância
c	amortecimento constante	R	resistência
k	constante da mola	$1/C$	elastância
$F(t)$	força externa	$E(t)$	força eletromotriz



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Aplicações: Condução de calor com termo fonte



Equações lineares de segunda ordem

Aplicações

Condução de calor com termo fonte

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3.39)$$

The general solution is

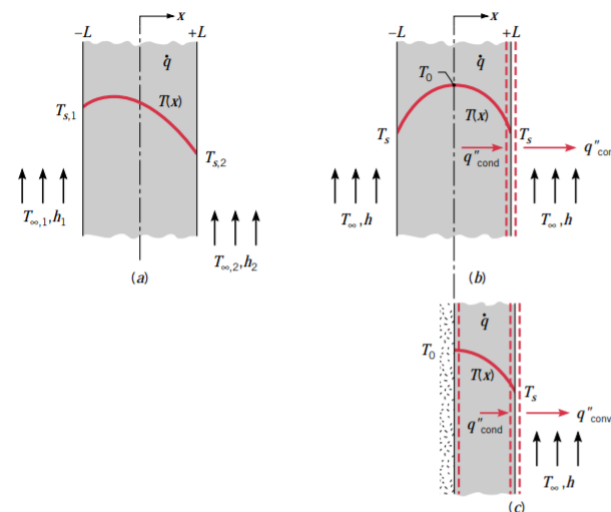
$$T = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \quad (3.40)$$

where C_1 and C_2 are the constants of integration. For the prescribed boundary conditions,

$$T(-L) = T_{s,1} \quad \text{and} \quad T(L) = T_{s,2}$$

The constants may be evaluated and are of the form

$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \quad \text{and} \quad C_2 = \frac{\dot{q}}{2k}L^2 + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

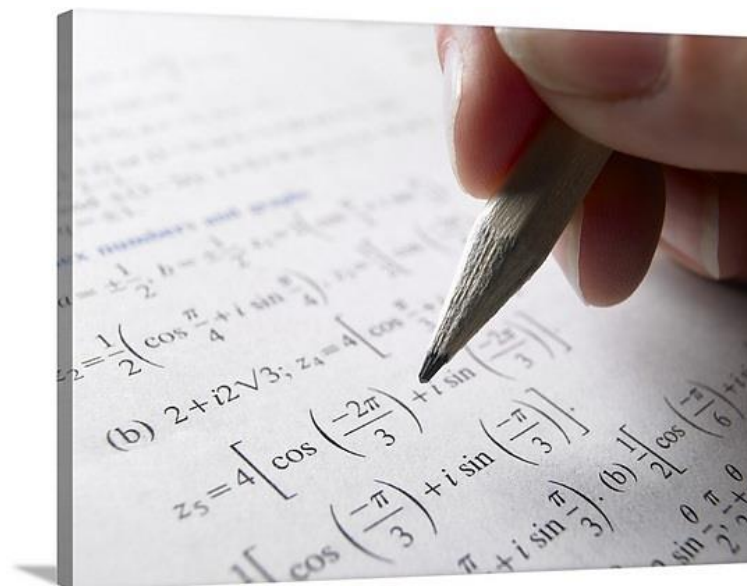


Onde $T(x)$ é a temperatura, x a posição, q a taxa de calor dissipada e k a condutividade térmica do meio.



Lista de exercícios

Lista 5





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.