Referências

$$f\left(x_{i+1}\right) \cong f\left(x_i\right) + h \cdot f'\left(x_i\right)$$ **Euler**

$$y' + p(t)y = g(t) \quad \mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$ **EDO linear 1ª ordem**

$$\psi_x = M \quad \psi_y = N$$
$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$
$$M_y = N_x \quad \frac{d\psi}{dx} = 0 \quad \psi = C$$

EDO 1ª ordem exata

$$ay'' + by' + cy = 0$$
$$ar^2 + br + c = 0$$
$$\begin{cases} y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ y = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} \\ y = e^{\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 sen(\beta t)\right] \end{cases}$$

EDO linear 2ª ordem Homogênea

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right)$$ f(x)

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right)$$ f(y)

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$
$$y = y_c + y_p$$

Term in $r(x)$	Choice for $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \ (n = 0, 1, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$	$e^{\alpha x}(K \cos \omega x + M \sin \omega x)$
$ke^{\alpha x} \sin \omega x$	$e^{\alpha x}(K \cos \omega x + M \sin \omega x)$

EDO linear 2ª ordem Não homogênea

1 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ as } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n a tão próximos de L quanto quisermos ao fazer suficientemente grande. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

12 Teorema da Sequência Monótona Toda sequência monótona limitada é convergente

2 Definição Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, deixe s_n denote por sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\Sigma\, a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

4 A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Se $|r| \geqslant 1$, a série geométrica é divergente.

6 Teorema Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

7 Teste de Divergência Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

O Teste da Integral Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

1 A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

O Teste de Comparação Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\Sigma\, b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\Sigma\, b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será divergente.

O Teste de Comparação no Limite Suponha que Σa_n e Σb_n sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

O Teste da Razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, , o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\Sigma\, a_n$.

Teste de Série Alternada Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

3 **Teorema** Se uma série $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

5 **Teorema** Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

O Teste da Raiz

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

Séries de Maclaurin Importantes e Seus Raios de Convergência