UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

EMB5014 - Séries e Equações Diferenciais

Prof. Diogo Lôndero da Silva

Lista 01

1. Classifique as equações abaixo quanto ao tipo, a ordem, homogeneidade e a linearidade.

a) $yy' + t = 0$

b) $y''' + y'' + y' + y = 0$

c) $u_x + u_y = 0$

d) $(y')^2 + y' = sen(x) + e^x$

e) $uu_{xx} = 0$

f) $y' + t^2 + cos(y) = 0$

2. Determine a unidade das constantes α e θ presentes em cada uma das seguintes equações diferenciais.

a) $\alpha yy' + \theta t = 0$ *onde* y [m] *e* t [s]

b) $\alpha(y')^2 = e^{\theta x}$ *onde* y [kg] *e* x [s]

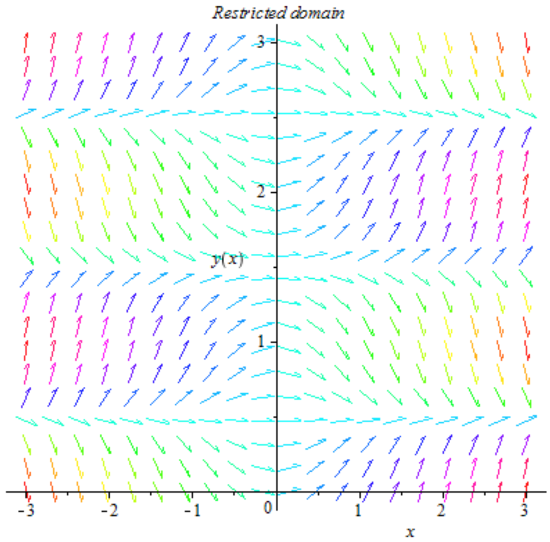
c) c) $\alpha u_x + \theta u_y = 0$ *onde* u [ºC] *e* x *e* y [m]

3. Determine qual ou quais das funções $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ e $y_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação diferencial. Lembre-se que para verificar se uma função é solução de uma equação diferencial, basta substituir ela e suas derivadas na equação diferencial. Se a igualdade for satisfeita a função é solução.

$$(x+3)\frac{d^2y}{dx^2} + (x+2)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

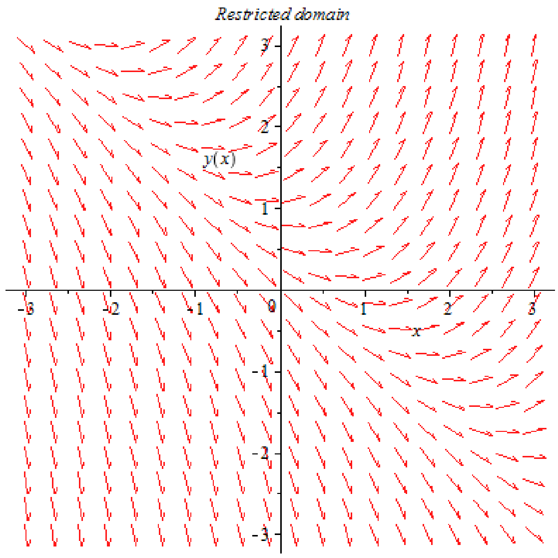
4. Empregando o campo de direções abaixo, esboce o gráfico das curvas que satisfazem as condições iniciais dadas:

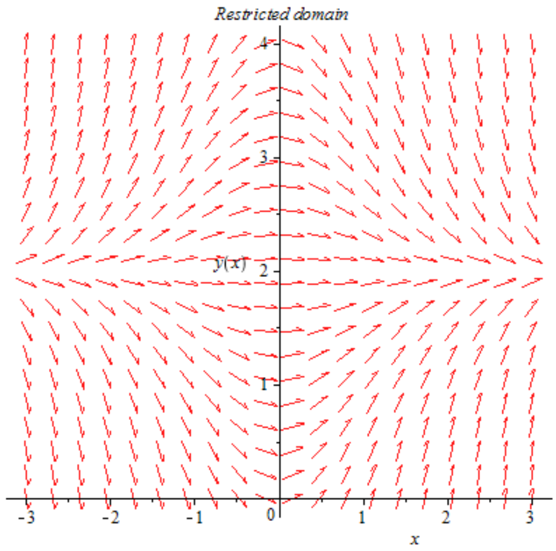
   i) $y(0) = 0$ ii) $y(0) = 0{,}5$ iii) $y(0) = 1$ iv) $y(0)=1{,}6$

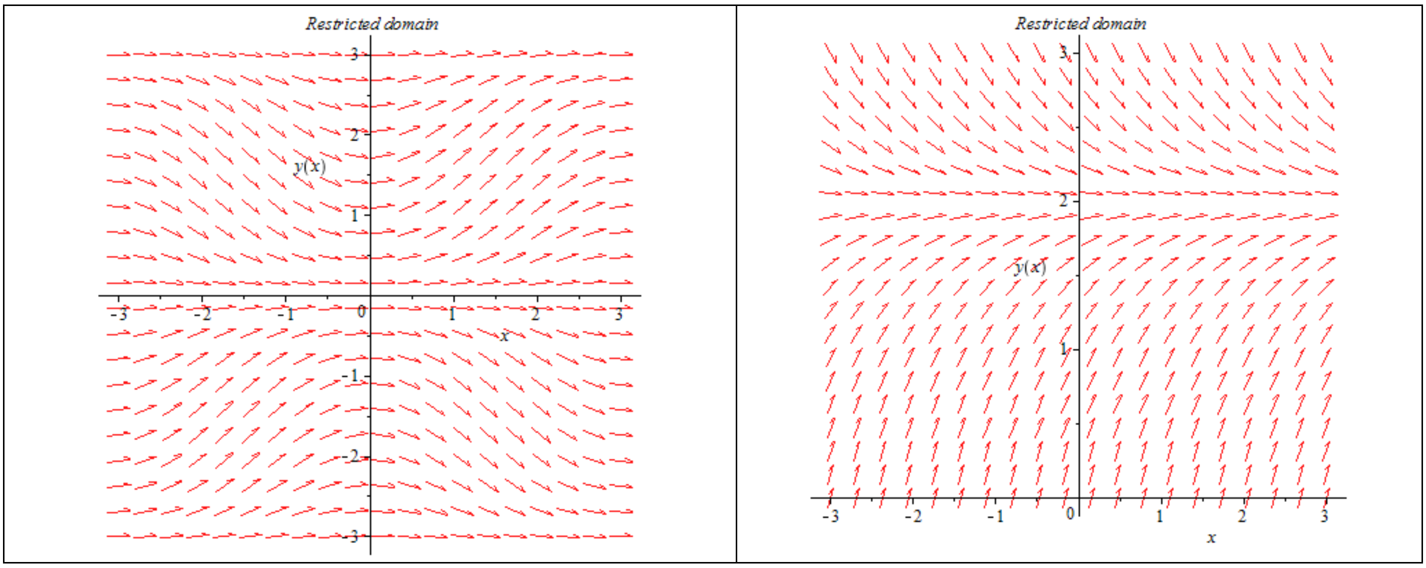


5. Associe cada uma das equações diferenciais abaixo com o corresponde campo de direções sem uso . Justifique sua resposta.

   a) $y' = 2-y$ b) $y' = x+y-1$ c) $y' = x(2-y)$ d) $y' = \text{sen}(x)\text{sen}(y)$







6. Desenhe o campo de direções da equação diferencial abaixo. Adicionalmente, verifique a sua resposta empregando um sistema de computação algébrica.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

7. Use o método de Euler com cada um dos passos (h) dados para estimar o valor de y(0,4), onde y é a solução do problema de valor inicial y' = y, dado y(0) = 1.

i) h = 0,4 ii) h = 0,2 iii) h = 0,1

a) Sabendo que a solução exata da do problema de valor inicial anterior é $y = e^x$, compare em um único gráfico esta função com os resultados obtidos para os diferentes passos i, ii e iii.

b) O erro do método de Euler é a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Avalie o erro no ponto x = 0,4 para os diferentes passos e determine o que acontece com o erro quando o valor do passo é reduzido pela metade.

8. Use o método de Euler com o passo 0,5 para calcular os valores aproximados de y1, y2, y3, y4 da solução do problema de valor inicial y' = y-2x, y(1) = 0.

9. Programe uma calculadora ou um computador para usar o método de Euler para calcular y(1), onde y(x) é a solução do problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

i) h = 1 ii) h = 0,1 iii) h = 0,01 iv) h = 0,001

a) Verifique graficamente se $y = 2 + e^{-x^3}$ é a solução exata do problema.

b) O que acontece com o erro quando o passo é dividido por 10?

c) Obtenha uma função que represente os pontos obtidos através de um método de regressão.

10. Questão do ENAD 2017

QUESTÃO 12

De acordo com a Lei de Resfriamento de Corpos, a taxa de variação da temperatura de um corpo em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente.

Considere que $T(t)$ é a temperatura do corpo em função do tempo, A é a temperatura do ambiente, t é o tempo e k é a constante de proporcionalidade.

Nesse contexto, o modelo matemático correspondente à Lei de Resfriamento de Corpos e à função resultante de sua resolução são dados, respectivamente, por

A) $\frac{dT}{dt} = -k(T - A);\ T(t) = (T(0) - A)e^{-kt} + A$

B) $\frac{dT}{dt} = k(T - A);\ T(t) = (T(0) - A)e^{kt} + A$

C) $\frac{dT}{dt} = -k(T - A);\ T(t) = e^{-kt} + A$

D) $\frac{dT}{dt} = k(T - A);\ T(t) = e^{-kt} + A$

E) $\frac{dT}{dt} = k(T - A);\ T(t) = e^{kt} + A$

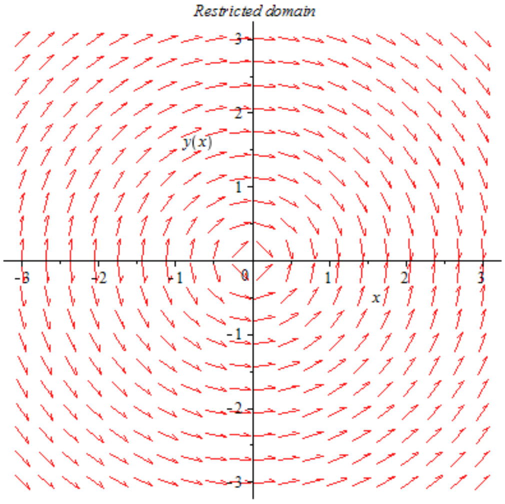
Verificação de conceitos

1. O que é a solução de uma equação diferencial?
2. No modelo entradas-saídas, qual(ais) variável(eis) da equação diferencial devem ser posicionadas no lado da saída e no lado da entrada?
3. Em quais categorias podemos classificar uma equação diferencial?
4. Por que é importante verificarmos a consitência dimensional em uma equação diferencial?
5. Quais são os 3 métodos gerais que podem ser empregados para obtenção da solução de uma equação diferencial?
6. Por que é importante manter as contantes de integração durante a utilização do método analítico? Como é possível determinar o valor dessas constantes?
7. Qual a diferença entre solução geral e solução particular de uma equação diferencial?
8. Como verifico se uma dada função é realmente solução de uma equação diferencial?
9. Qual a diferença principal entre um problema de valor de contorno e um problema de valor inicial?
10. Explique as etapas do raciocínio utilizado para a obtenção da solução geométrica (campo de direções) de uma equação diferencial.
11. Explique as etapas do raciocínio utilizado para a obtenção da solução numérica pelo método de Euler de uma equação diferencial.

Prof. Diogo Lôndero da Silva. Dr.Eng.

Respostas:

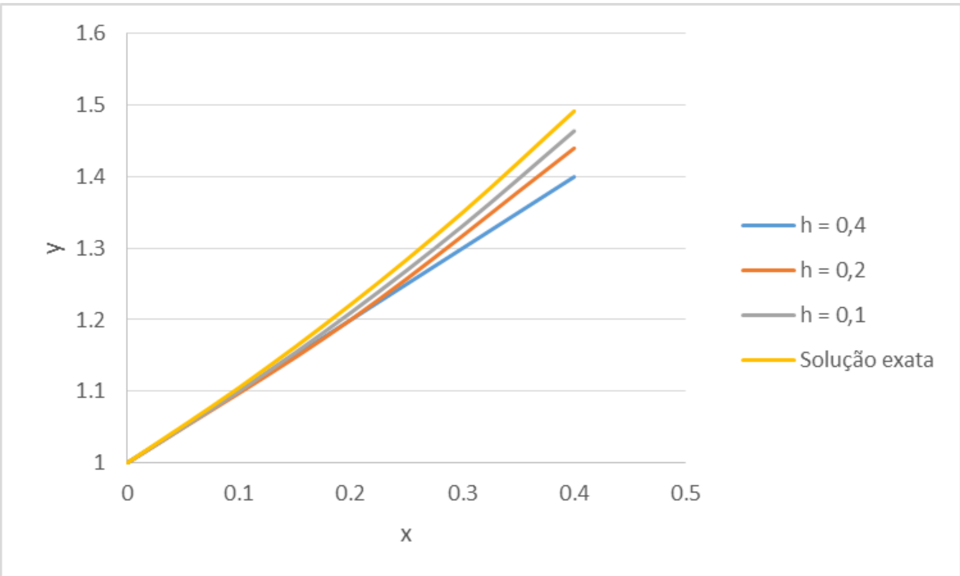
1. a) ordinária, primeira ordem, homogênea (manipule a equação), não linear. b) ordinária, terceira ordem, homogênea, linear. c) Parcial, primeira ordem, homogênea, linear. d) Ordinária, primeira ordem, não-homogênea, não linear. e) Ordinária, segunda ordem, homogênea, não linear (pode ser transformada em linear dividindo por *u*). f) Ordinária, primeira ordem, não homogênea, não linear.
2. a) $[\alpha]=[\theta][s^2/m^2]$ b) $[\alpha] = [s/kg]$^2; $[\theta] = [1/s]$ c) $[\alpha]=[\theta]$.
3. z_1 (x) não, z_2 (x) não, z_3 (x) sim.
4. Desenhar
5. Dica: localize as coordenadas onde y'=0, y'=1 ou y'=-1 e identifique padrões. a) direita inferior b) esquerda superior c) direita superior d) esquerda inferior.
6. Maple



7.

a)

h=0,4				h=0,2				h=0,1			Solução exata	
x	y			x	y			x	y		x	y
0	1			0	1			0	1		0	1
0.4	1.4			0.2	1.2			0.1	1.1		0.1	1.105171
				0.4	1.44			0.2	1.21		0.2	1.221403
								0.3	1.331		0.3	1.349859
								0.4	1.4641		0.4	1.491825



b) Empregue a rotina e avalie o erro.

8 e 9) Implemente uma rotina semelhante ao exemplo abaixo que foi desenvolvido no matlab

```
close all;
    clear all;
        clc;
        x(1)=0;
        xf=0.4;
        h=0.1;
        nstep =(xf-x(1))/h
        %condicao inicial
        y(1)=1;
        ya(1)=1;

        for i=1:nstep

           %Numerical solution
           dy(i)=y(i);
           y(i+1)= y(i)+h*dy(i);
           %Analitical solution
           x(i+1)=x(i)+h;
           ya(i+1)=exp(x(i+1));


        end
        Erro=y(i+1)-ya(i+1)

        figure(1);
    plot(x,y,'m--');
    xlabel('Tempo [s]');
    ylabel('Y [y]');
    hold on
    plot(x,ya,'b');
```