UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

EMB5014 - Séries e Equações Diferenciais

Prof. Diogo Lôndero da Silva

Lista 11

Secção 7.1

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, transforme a equação dada em um sistema de equações de primeira ordem.

1. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 0$
2. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 3\,\text{sen}\, t$
3. $t^2u'' + tu' + (t^2 - 0{,}25)u = 0$
4. $u^{(4)} - u = 0$

Em cada um dos Problemas 5 e 6, transforme o problema de valor inicial dado em um problema de valor inicial para duas equações de primeira ordem.

5. $u'' + 0{,}25u' + 4u = 2\cos 3t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2$
6. $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_0'$
7. Sistemas de equações de primeira ordem podem ser transformados, algumas vezes, em uma única equação de ordem maior. Considere o sistema

$$x_1' = -2x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - 2x_2.$$

(a) Resolva a primeira equação para x_1 e substitua na segunda equação, obtendo, assim, uma equação de segunda ordem para x_1. Resolva essa equação para x_1 e determine x_2.
(b) Encontre a solução do sistema dado que também satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$.
(c) Esboce a curva, para $t \geq 0$, dada em forma paramétrica pelas expressões para x_1 e x_2 encontradas em (b).

17. As Eqs. (1) podem ser deduzidas desenhando-se um diagrama mostrando as forças agindo sobre cada massa. A Fig. 7.1.3*a* mostra a situação quando os deslocamentos x_1 e x_2 das duas massas são ambos positivos (para a direita) e $x_2 > x_1$. Nesse caso, as molas 1 e 2 estão alongadas e a mola 3 está comprimida, gerando as forças ilustradas na Fig. 7.1.3*b*. Use a lei de Newton ($F = ma$) para deduzir as Eqs. (1).

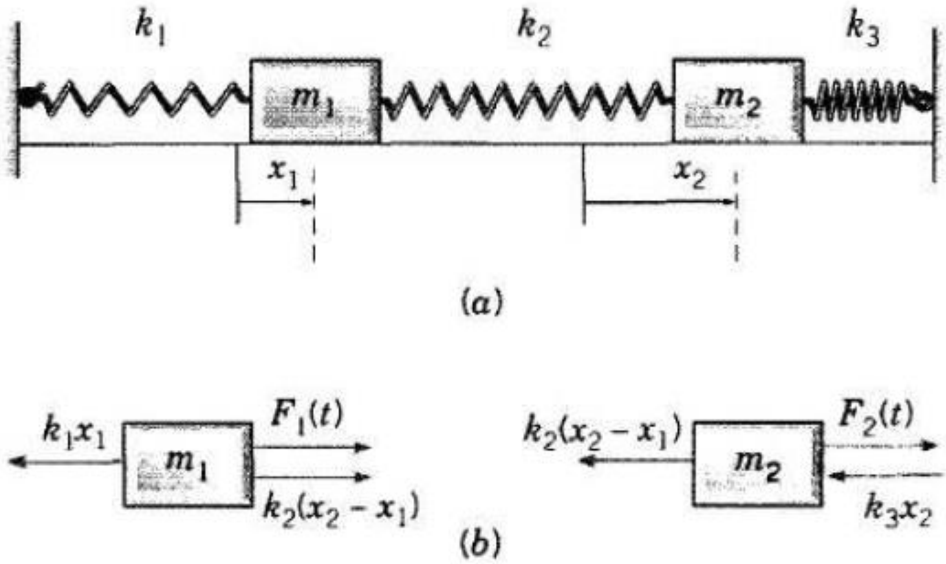

FIG. 7.1.3 (*a*) Os deslocamentos x_1 e x_2 são ambos positivos. (*b*) O diagrama de forças para o sistema massa-mola.

Eqs (1)

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_1(t)$$

$$= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t),$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t)$$

$$= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t).$$

18. Transforme o sistema (1) em um sistema de equações de primeira ordem fazendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x'_1$ e $y_4 = x'_2$.

Circuitos Elétricos. A teoria de circuitos elétricos, do tipo ilustrado na Fig. 7.1.2, consistindo em indutores, resistências e capacitores, baseia-se nas leis de Kirchhoff: (1) o fluxo total de corrente atravessando cada nó (ou junção) é zero e (2) a diferença de tensão total em cada laço fechado é zero. Além das leis de Kirchhoff, temos, também, a relação entre a corrente I em ampères passando em cada elemento do circuito e a diferença de potencial V naquele elemento, a saber,

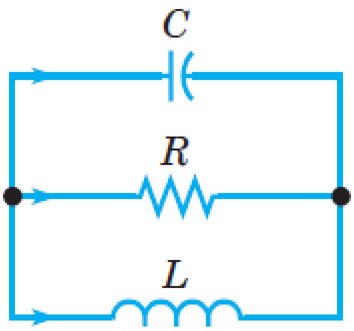

Fig 7.1.2

$$V = RI, \qquad R = \text{resistência em ohms};$$

$$C\frac{dV}{dt} = I, \qquad C = \text{capacitância em farads}^2;$$

$$L\frac{dI}{dt} = V, \qquad L = \text{indutância em henrys}.$$

As leis de Kirchhoff e a relação entre corrente e diferença de tensão em cada elemento do circuito fornecem um sistema de equações algébricas e diferenciais das quais pode-se determinar a diferença de tensão e a corrente em todo o circuito. Os problemas de 19 a 21 ilustram o procedimento que acabamos de descrever.

19. Considere o circuito ilustrado na Fig. 7.1.2. Sejam I_1, I_2 e I_3 as correntes atravessando, respectivamente, o capacitor, a resistência e o indutor. Analogamente, sejam V_1, V_2 e V_3 as diferenças de tensão correspondentes. As setas denotam as direções, escolhidas arbitrariamente, nas quais as correntes e diferenças de tensão serão consideradas positivas.

(a) Aplicando a segunda lei de Kirchhoff no laço superior do circuito, mostre que

$$V_1 - V_2 = 0. \tag{i}$$

De maneira análoga, mostre que

$$V_2 - V_3 = 0. \tag{ii}$$

(b) Aplicando a primeira lei de Kirchhoff em qualquer dos nós do circuito, mostre que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \tag{iii}$$

(c) Use a relação entre a corrente e a diferença de tensão em cada elemento do circuito para obter as equações

$$CV_1' = I_1, \qquad V_2 = RI_2, \qquad LI_3' = V_3. \tag{iv}$$

(d) Elimine V_2, V_3, I_1 e I_2 das equações de (i) a (iv) para obter

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \qquad LI_3' = V_1. \tag{v}$$

Observe que, se omitirmos os índices nas Eqs. (v), então teremos o sistema (2) desta seção.

22. Considere os dois tanques interligados ilustrados na Fig. 7.1.6.[3] O tanque 1 contém, inicialmente, 30 gal ($\cong$ 136 l) de água e 25 oz ($\cong$ 709 g) de sal, e o tanque 2 contém, inicialmente, 20 gal ($\cong$ 91 l) de água e 15 oz ($\cong$ 425 g) de sal. Entra no tanque 1 uma mistura de água contendo 1 oz/gal ($\cong$ 6 g/l) a uma taxa de 1,5 gal/min ($\cong$ 31 l/min). A mistura flui do tanque 1 para o tanque 2 a uma taxa de 3 gal/min ($\cong$ 62 l/min). Entra, também, no tanque 2, vinda de fora, uma mistura de água contendo 3 oz/gal ($\cong$ 19 g/l) a uma taxa de 1 gal/min ($\cong$ 4,5 l/min). A mistura escorre do tanque 2 a uma taxa de 4 gal/min ($\cong$ 18 l/min) e parte dela volta para o tanque 1 a uma taxa de 1,5 gal/min ($\cong$ 31 l/min), enquanto o restante deixa o sistema.

(a) Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ as quantidades de sal nos tanques 1 e 2, respectivamente, no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais que modelam o processo de fluxo. Observe que o sistema de equações diferenciais é não-homogêneo.

(b) Encontre os valores de Q_1 e Q_2 para os quais o sistema está em equilíbrio, isto é, não varia com o tempo. Sejam Q_1^E e Q_2^E os valores de equilíbrio. Você pode prever qual tanque atingirá seu estado de equilíbrio mais rapidamente?

(c) Sejam $x_1(t) = Q_1(t) - Q_1^E$ e $x_2(t) = Q_2(t) - Q_2^E$. Determine um problema de valor inicial para x_1 e x_2. Observe que o sistema de equações para x_1 e x_2 é homogêneo.

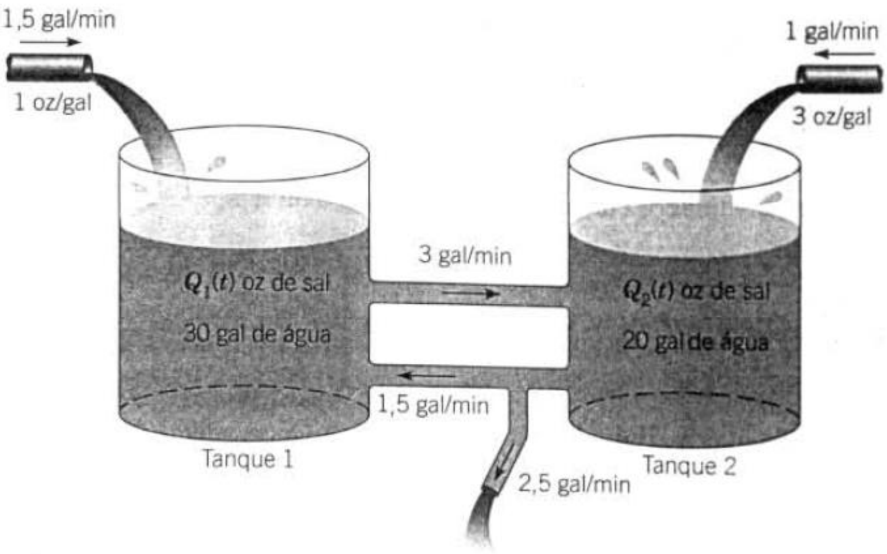

FIGURA 7.1.6 Dois tanques interligados (Problema 22).

<u>Secção 7.2</u> (Revisão opcional de sistemas lineares)

Problemas

Nos problemas de 1 a 5, resolva o conjunto de equações dado ou mostre que não tem solução.

1. $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nos problemas de 15 a 24, encontre todos os autovalores e autovetores da matriz dada.

15. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -3 & 3/4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 11/9 & -2/9 & 8/9 \\ -2/9 & 2/9 & 10/9 \\ 8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Secção 7.5

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, encontre a solução geral do sistema de equações dado e descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

Além disso, desenhe um campo de direções e faça o gráfico de algumas trajetórias do sistema.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Nos problemas de 9 a 14, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos problemas de 15 a 18, resolva o problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Obs: Todos os exercícios foram extraídos [Boyce, W.E., DiPrima, R.C., Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno , 8ª ed.]

Atualizado em: 02/05/2016.
Professor Diogo Lôndero da Silva.