



Lista 08

) Testes de comparação

11.4 Exercícios

1. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\sum b_n$ seja convergente.
 - (a) Se $a_n > b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?
 - (b) Se $a_n < b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?
2. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\sum b_n$ seja divergente.
 - (a) Se $a_n > b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?
 - (b) Se $a_n < b_n$ para todo n , o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por quê?

3–32 Determine se a série converge ou diverge.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3 + 1}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{10^n}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3 + 4k + 3}}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(k^2-1)}{(k+1)(k^2+4)^2}$

11.5 Exercícios

1. (a) O que é uma série alternada?
(b) Sob que condições uma série alternada converge?
(c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

2–20 Teste a série quanto a convergência ou divergência.

2. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \dots$

3. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \dots$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \dots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

3) Convergência absoluta, teste da razão e teste da raiz

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1,1)^n}{n^4}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n^2}$$

$$17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 4}$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 2}}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1} \right)^{5n}$$

11.8 Exercícios

1. O que é uma série de potências?
2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências?
Como você o encontra?
(b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3–28 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$$

$$13. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$15. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$$

$$16. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$$

5) Representação de funções como séries de Potências

11.9 Exercícios

1. Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for 10, qual será o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$? Por quê?
2. Suponha que você saiba que a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \frac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \frac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

8. $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

10. $f(x) = \frac{x^2}{a^3-x^3}$

11–12 Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

11. $f(x) = \frac{3}{x^2-x-2}$

12. $f(x) = \frac{x+2}{2x^2-x-1}$

6) Séries de Taylor e Maclaurin

29–38 Use uma série de Maclaurin na Tabela 1 para obter a série de Maclaurin da função dada.

29. $f(x) = \sin \pi x$

30. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$

32. $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x \cos(\frac{1}{2}x^2)$

34. $f(x) = x^2 \ln(1 + x^3)$

35. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$

36. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2 + x}}$

37. $f(x) = \sin^2 x$ [Dica: Use $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

38. $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

 **39–42** Encontre a série de Maclaurin de f (por qualquer método) e seu raio de convergência. Trace f e seus primeiros polinômios de Taylor na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f ?

39. $f(x) = \cos(x^2)$

40. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$

42. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x^3)$

43. Use a série de Maclaurin para $\cos x$ para calcular $\cos 5^\circ$ com precisão de cinco casas decimais.

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma sequência convergente?
(b) O que é uma série convergente?
(c) O que significa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$?
(d) O que significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?
2. (a) O que é uma sequência limitada?
(b) O que é uma sequência monótona?
(c) O que você pode dizer sobre uma sequência monótona limitada?
3. (a) O que é uma série geométrica? Sob quais circunstâncias ela é convergente? Qual é sua soma?
(b) O que é uma série p ? Sob quais circunstâncias ela é convergente?
4. Suponha que $\sum a_n = 3$ e s_n seja a n -ésima soma parcial da série. O que é $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$? O que é $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$?
5. Enuncie o seguinte:
(a) O Teste para Divergência.
(b) O Teste da Integral.
(c) O Teste da Comparação.
(d) O Teste da Comparação no Limite.
(e) O Teste da Série Alternada.
(f) O Teste da Razão.
(g) O Teste da Raiz.
6. (a) O que é uma série absolutamente convergente?
(b) O que você pode dizer sobre estas séries?
(c) O que é uma série condicionalmente convergente?
7. (a) Se uma série for convergente pelo Teste da Integral, como você estima sua soma?
(b) Se uma série for convergente pelo Teste da Comparação,

- como você estima sua soma?
- (c) Se uma série for convergente pelo Teste da Série Alternada, como você estima sua soma?
8. (a) Escreva a forma geral de uma série de potências.
 (b) O que é o raio de convergência de uma série de potências?
 (c) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências?
9. Suponha que $f(x)$ seja a soma de uma série de potências com raio de convergência R .
 (a) Como você deriva f ? Qual é o raio de convergência da série para f' ?
 (b) Como você integra f ? Qual é o raio de convergência da série para $\int f(x) dx$?
10. (a) Escreva uma expressão para a série de Taylor de n -ésimo grau de f centrada em a .
 (b) Escreva uma expressão para a série de Taylor de f centrada em a .
 (c) Escreva uma expressão para a série de Maclaurin de f .
 (d) Como você mostra que $f(x)$ é igual à soma de sua série de Taylor?
 (e) Enuncie a Desigualdade de Taylor.
11. Escreva a série de Maclaurin e o intervalo de convergência para cada uma das seguintes funções:
 (a) $1/(1 - x)$ (b) e^x (c) $\sin x$
 (d) $\cos x$ (e) $\tan^{-1}x$ (f) $\ln(1 + x)$
12. Escreva a expansão da série binomial de $(1 + x)^k$. Qual é o raio de convergência desta série?

Aplicações

32. A resistividade ρ de um fio condutor é o recíproco da condutividade e é medida em unidades de ohm-metros ($\Omega\cdot\text{m}$). A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a equação

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

onde t é a temperatura em $^{\circ}\text{C}$. Existem tabelas que listam os valores de α (o coeficiente de temperatura) e ρ_{20} (a resistividade a 20°C) para vários metais. Exceto a temperaturas muito baixas, a resistividade varia quase linearmente com a temperatura, e assim é comum aproximar a expressão para $\rho(t)$ por seu polinômio de Taylor de grau 1 ou 2 em $t = 20$.

- (a) Encontre expressões para estas aproximações linear e quadrática.



- (b) Para o cobre, a tabela fornece $\alpha = 0,0039/^{\circ}\text{C}$ e $\rho_{20} = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$. Trace a resistividade do cobre e as aproximações linear e quadrática para $-250^{\circ}\text{C} \leq t \leq 1000^{\circ}\text{C}$.

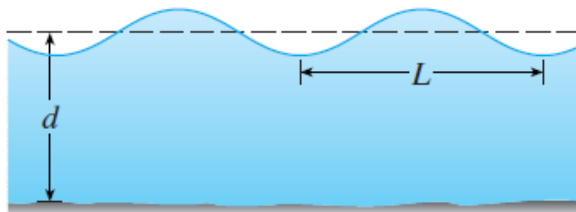


- (c) Para quais valores de t a aproximação linear coincide com a expressão exponencial com precisão de 1%?

35. Se uma onda de água com comprimento L se mover com velocidade v ao longo de um corpo de água com profundidade d , como na figura, então

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi d}{L}$$

- (a) Se a água for profunda, mostre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.
- (b) Se a água for rasa, use a série de Maclaurin para tgh para mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Então, em água rasa a velocidade de uma onda tende a ser independente do comprimento da onda.)
- (c) Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para mostrar que, se $L > 10d$, então a estimativa $v^2 \approx gd$ tem precisão de $0,014gL$.



37. Se um topógrafo mede as diferenças nas elevações dos terrenos em um deserto, com a finalidade de construir uma rodovia, ele tem de fazer correções por causa da curvatura da Terra.

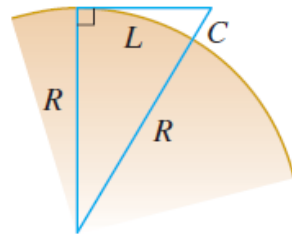
(a) Se R é o raio da Terra e L é o comprimento da rodovia, mostre que a correção a ser feita será

$$C = R \sec(L/R) - R$$

(b) Use um polinômio de Taylor para mostrar que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare as correções dadas pelas fórmulas em (a) e (b) para uma rodovia que tenha 100 km de percurso. (Tome o raio da Terra como 6.370 km.)





Qualquer objeto emite radiação quando aquecido. Um *corpo negro* é um sistema que absorve toda a radiação que incide nele. Por exemplo, uma superfície preta não brilhante ou uma grande cavidade com um pequeno furo em sua parede (como uma fornalha siderúrgica) é um corpo negro e emite radiação de corpo negro. Até a radiação do Sol está próxima de ser a radiação de um corpo negro.

Proposta no fim do século XIX, a Lei de Rayleigh-Jeans expressa a densidade de energia da radiação do corpo negro de comprimento de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura em kelvins (K) e k é a constante de Boltzmann. A Lei de Rayleigh-Jeans coincide com as medidas experimentais para comprimentos de onda longos, mas diverge drasticamente para comprimentos de onda curtos. [A lei prediz que $f(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow 0^+$, mas experiências mostraram que $f(\lambda) \rightarrow 0$.] Este fato é conhecido como a *catástrofe ultravioleta*.

Em 1900, Max Planck encontrou um modelo melhor (conhecido agora como a Lei de Planck) para a radiação do corpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura (em kelvins) e

$$h = \text{constante de Planck's} = 6,6262 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$c = \text{velocidade da luz} = 2,997925 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann's} = 1,3807 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

1. Use a Regra de l'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$$

para a Lei de Planck. Assim, essa lei pode modelar melhor a radiação do corpo negro que a Lei de Rayleigh-Jeans para comprimentos de onda mais curtos.

2. Use um polinômio de Taylor para mostrar que, para comprimentos de onda longos, a Lei de Planck fornece aproximadamente os mesmos valores que a Lei de Rayleigh-Jeans.
3. Trace f dada por ambas as leis na mesma tela e comente as similaridades e diferenças. Use $T = 5.700 \text{ K}$ (a temperatura do Sol). (Você pode querer mudar de metros para unidade mais conveniente de micrômetros: $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$.)
4. Use seu gráfico no Problema 3 para estimar o valor de λ para o qual $f(\lambda)$ é um máximo na Lei de Planck.
5. Investigue como o gráfico de f muda quando T varia. (Use a Lei de Planck.) Em particular, trace f para as estrelas Betelgeuse ($T = 3\,400 \text{ K}$), Procyon ($T = 6\,400 \text{ K}$) e Sirius ($T = 9\,200 \text{ K}$), e também o Sol. Como a radiação total emitida (a área sob a curva) varia com T ? Use o gráfico para comentar por que Sirius é conhecida como uma estrela azul e Betelgeuse, como uma estrela vermelha.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

Obs: Todos os exercícios foram extraídos [Stewart, J. Cálculo, 7ª ed., Vol. 2]

Atualizado em: 02/05/2016.
Professor Diogo Lôndero da Silva.