Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

# Séries e Equações Diferenciais

## Unidade 15

## Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem – Parte II

Prof. Diogo Lôndero da Silva

# Plano

1. Revisão de matrizes

2. Teoria básica de sistemas de equações lineares de primeira ordem;

3. Possibilidades para os autovalores e consequências para a solução geral;

4. Autovalores complexos

# Revisão de matrizes

# Multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 27 & -2 & 12 \\ -1 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2 x 3    3 x 4    2 x 4

match

result

- Os índices internos devem coincidir.
- Os índices externos indicam o dimensão da matriz resultante.

Propriedades

$$AB \neq BA$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

# Matriz identidade

$$I_1 = [1],\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \cdots,\ I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Se A for mxn

$I_m.A = A.I_n = A$

# Inversão de matrizes

Uma matriz A será inversível ou invertível, se existir uma matriz B tal que

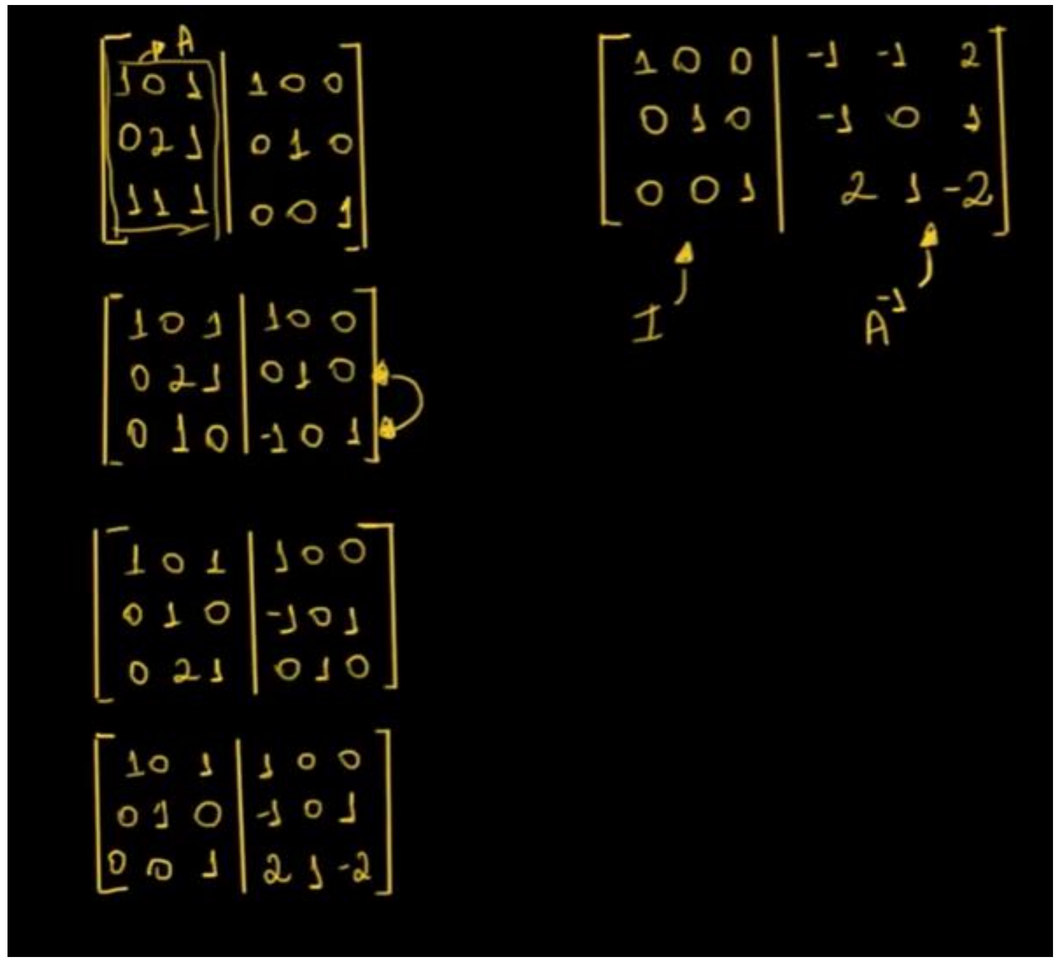
AB = BA = I   logo   B = $A^{-1}$   e   det(A) ≠ 0.

Para matrizes 2 x 2   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

# Inversão de matrizes

Para matrizes n x n, podemos usar eliminação Gaussiana

$A \mid I \;\rightarrow\; I \mid A^{-1}$



# Sistemas lineares

$$\begin{matrix} c_{11}x_1 & \cdots & c_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{11}x_1 & \cdots & c_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

Se $A^{-1}$ existir

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \qquad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Se $\vec{b} = 0$ obtemos a solução trivial

$$\vec{x} = \vec{0}$$

# Independência linear

Um conjunto de vetores $x_1$, $x_2$, ...,$x_n$ será linearmente independente se

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

for atendida se e somente se $c_1 = c_2 \cdots = c_n = 0$ .

Esta condição é equivalente a W[ $x_1$ $x_2$ ... $x_n$] ≠ 0, pois

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Será atendido com $c_1$=$c_2$=...=$c_n$ = 0 se o det(X)≠0.

# Autovalores e autovetores

Dada a transformada linear

$$\vec{y} = A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(A - \lambda I\right)\vec{x} = \vec{0}$$

Para evitar a solução trivial $\left|A - \lambda I\right| = 0$

O que permite identificar os autovalores e autovetores.
Autovalores distintos geral autovetores LI.

# Teoria básica de sistemas de equações lineares de primeira ordem

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

**Para um sistema n x n podemos propor o seguinte método geral**

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = A \end{array}\right\} \quad \vec{x}' = A\vec{x} \qquad (1)$$

Com solução na forma $\vec{x} = \vec{\alpha} e^{\lambda t}$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

Substituindo a solução proposta e sua derivada no sistema de equações diferenciais (1).

$$\lambda \vec{\alpha} e^{\lambda t} = A\vec{\alpha} e^{\lambda t} \Rightarrow A\vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \text{Autovalores } \lambda \Rightarrow \text{Autovetores } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

Equação característica

## Teoria básica de sistemas de equações lineares de primeira ordem

O sistema de equações diferencias lineares de primeira ordem

$$
\begin{aligned}
x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\
&\vdots \\
x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Ao considerarmos:

- $x_1 = \phi_1(t)$, ..., $x_n = \phi_n(t)$ como componentes de um vetor $\mathbf{x} = \phi(t)$.
- $g_1(t)$ , ..., $g_n(t)$ como componentes de um vetor $\mathbf{g}(t)$.
- $p_{11}(t)$, ..., $p_{nn}(t)$ elementos de uma matriza n x n $\mathbf{P}(t)$.

Pode ser representado como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \qquad (2)$$

**Teoria básica de sistemas de equações lineares de primeira ordem**

Dizemos que um vetor **x** = $\phi$(t) é solução da equação 2 se suas componentes satisfazem esta mesma equação.

É conveniente considerarmos primeiramente o caso homogêneo **g**(t) = **0**, que torna a equação 2 igual a:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{3}$$

Cujas soluções específicas são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots \tag{4}$$

Os fatos principais sobre a estrutura das soluções do sistema (3) estão enunciados nos seguintes teoremas.

**Teorema 1**

Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}$ $\mathbf{x}^{(2)}$ são soluções do sistema (3), então a combinação linear $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ também é solução para quaisquer constantes $c_1$ e $c_2$.

Este é o princípio da superposição e permite concluir que se $\mathbf{x}^{(1)}$ , ..., $\mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema (3) então

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \qquad (5)$$

Também será uma solução.

**Exemplo:** Demonstre que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

e $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ Satisfazem

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

**Teorema 2**

Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}$ são soluções linearmente independentes do sistema (3) em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ do sistema (3) pode ser expressa como uma combinação linear de $\mathbf{x}^{(1)}$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}$ ,

$$\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \qquad (11)$$

de uma única maneira. Essa é chamada solução geral ou fundamental.

Lembre-se: $\mathbf{x}^{(1)}$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}$ são soluções linearmente independentes do sistema (3) que formam a matriz $\mathbf{X}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Se e somente se det $(\mathbf{X}) \neq 0$.

Esse determinante é chamado de Wronskiano e denotado por $W[\mathbf{x}^{(1)}, ..., \mathbf{x}^{(n)}]$.

**Exemplo:** Determine se

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

São LI

$$W = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -2e^{2t} - 2e^{2t} = -4e^{2t} \neq 0$$

Como W $\neq$0 para todo t, as soluções são LI

# <u>Possibilidades para os autovalores e consequências para a solução geral;</u>

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

## Possibilidades para os autovalores e consequências na solução geral

Se supusermos que **A** é uma matriz real, existem três possibilidades para os autovalores de **A**:

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si;
   - Existem n autovetores LI; (Dinâmica exponencial)

2. Alguns autovalores ocorrem em pares conjugados;
   - Se os autovalores forem pares conjugados complexos mas distintos, existirão n autovetores LI; (Dinâmica oscilatória)

3. Alguns autovalores são repetidos;
   - Se a matriz **A** for real e simétrica sempre existirão n aturovetores LI, mesmo que alguns autovalores sejam repetidos.
   - Caso contrário, é necessário encontrar outras soluções LI da forma $\xi e^{\lambda t}$

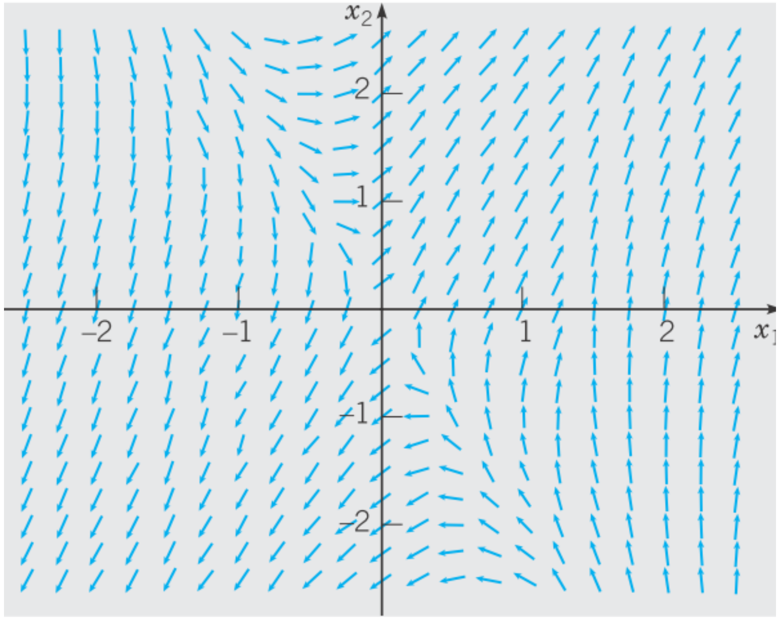
# <u>Autovalores reais e distintos</u>

**Exemplo 1:** Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Faça um gráfico do campo de direções e determine o comportamento qualitativo das soluções. Depois encontre a solução geral e desenhe diversas trajetórias.

**Solução:** Com auxílio de um SCA obtém-se:




Perceba como as soluções tendem a se afastar da origem!

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Para encontrar explicitamente a solução empregamos

$$(A-\lambda I)\vec{\alpha}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(I)}$$

A solução não trivial é obtida fazendo det (A) = 0.

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4$$

$$= r^2 - 2r - 3 = 0.$$

Cujas raízes são $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$, que são os autovalores.

Para $r_1 = 3$ o sistema (I) se torna: $-2\xi_1 + \xi_2 = 0.$

Que gera o autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Para $r_2$ = -1 o sistema (I) se torna: $-2\xi_1 - \xi_2 = 0$

Que gera o autovetor $$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Empregando os autovalores e autovetores encontrados, obtém-se duas soluções linearmente independentes, pois autovalores distintos geram autovetores LI.

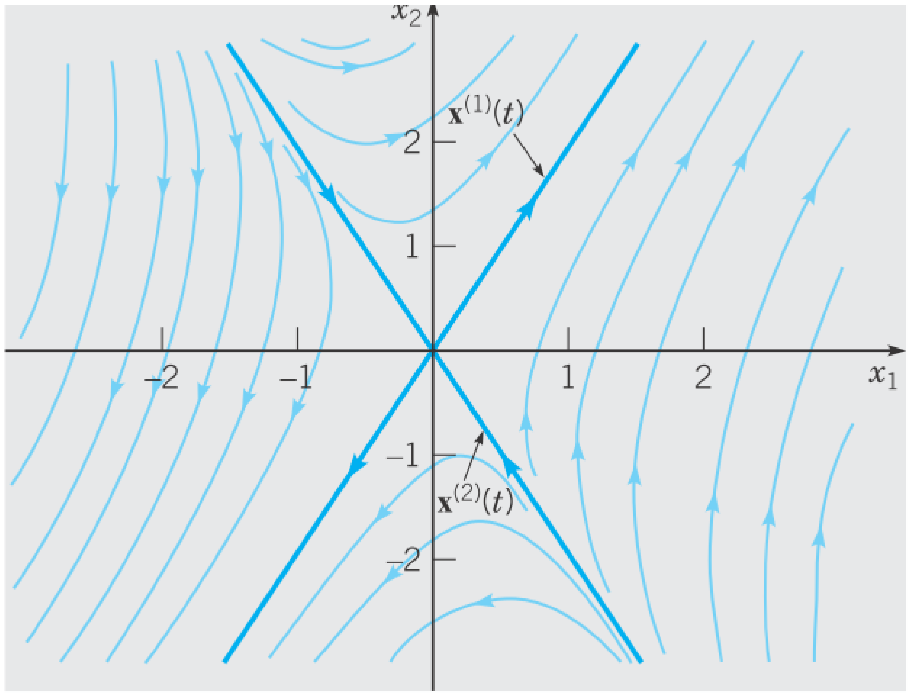
$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Portanto, a solução geral é

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \end{aligned}$$

A figura abaixo permite a visualização da solução, que pode ser esboçada com auxílio dos autovalores e autovetores.

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$$
$$= c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t},$$




Perceba que os autovetores determinam a direção da convergência enquanto os autovalores indicam se a convergência é para 0 ou infinito.
Observe que o termo que contém $c_1$ é dominante quando $t \to \infty$ enquanto o termo que contém $c_2$ é dominante quando $t \to -\infty$.
Estes limites definem o comportamento de todas as soluções.

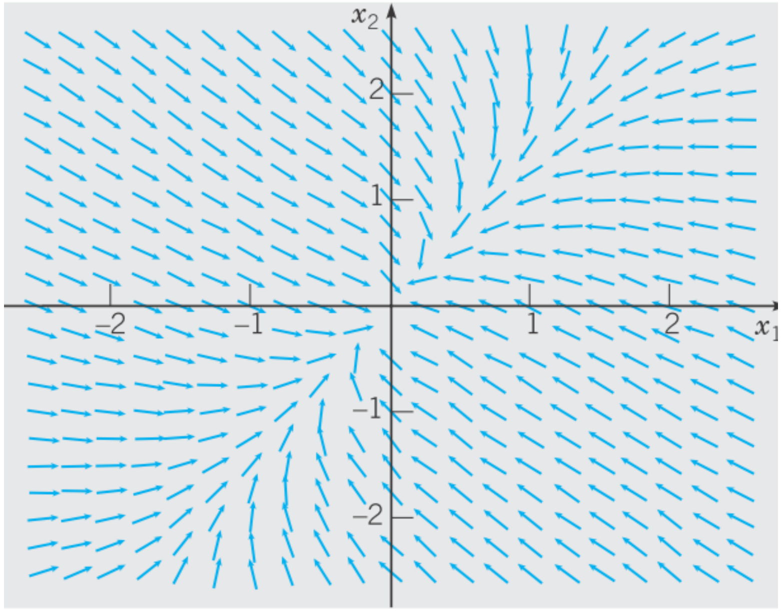
# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

**Exemplo 2:** Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Faça um gráfico do campo de direções e determine o comportamento qualitativo das soluções. Depois encontre a solução geral e desenhe diversas trajetórias.

**Solução:** Com auxílio de um SCA obtém-se:




Perceba como, neste caso, as soluções tendem a convergir para a origem!

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Para encontrar explicitamente a solução empregamos

$$(A-\lambda I)\vec{\alpha}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(I)}$$

A solução não trivial é obtida fazendo det (A) = 0.

$$\begin{aligned}(-3-r)(-2-r)-2 &= r^2+5r+4 \\ &= (r+1)(r+4)=0,\end{aligned}$$

Cujas raízes são $r_1$ = -1 e $r_2$ = -4, que são os autovalores.

Para $r_1$ =-1o sistema (I) se torna:

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Que gera o autovetor $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Para $r_2$ = -4 o sistema (I) se torna: $\xi_1 - \sqrt{2}\xi_2 = 0$

Que gera o autovetor

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Empregando os autovalores e autovetores encontrados, obtém-se duas soluções linearmente independentes, pois autovalores distintos geram autovetores LI.

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t},$$

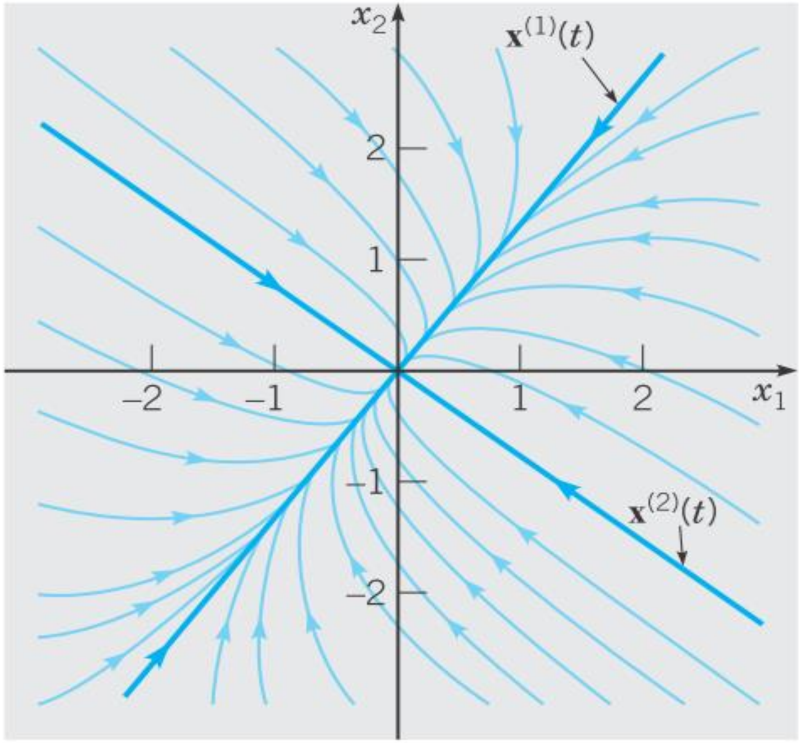
Portanto, a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}.$$

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

A figura abaixo permite a visualização da solução, que pode ser esboçada com auxílio dos autovalores e autovetores.

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}.$$




Perceba que os autovetores determinam a direção da convergência enquanto os autovalores indicam se a convergência é para 0 ou infinito.
Observe que o termo que contém $c_1$ é dominante quando $t \to \infty$ enquanto o termo que contém $c_2$ é dominante quando $t \to -\infty$.
Estes limites definem o comportamento de todas as soluções.

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Os dois exemplos precedentes ilustram os dois caos principais para um sistema 2 x 2 com autovalores reais distintos: No exemplo 1 eles tem sinais opostos e no exemplo 2 o mesmo sinal .

Até o momento, aprendemos que para encontrar a solução de um sistema homogêneo de EDOs lineares precisamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz **A**.

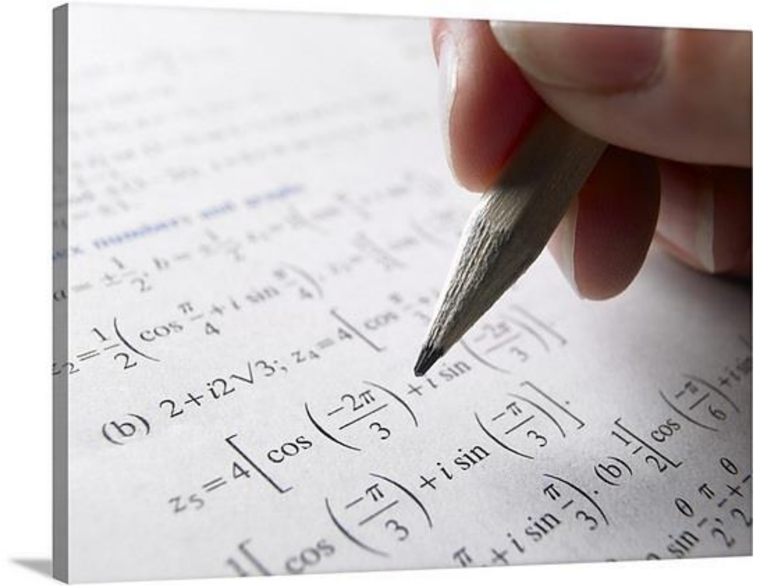
Os n autovalores $\lambda$ (que podem ser repetidos) são as raízes da equação polinomial de grau n

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

A natureza dos autovalores e autovetores associados determina a natureza da solução geral do sistema homogêneo de EDOs lineares .

# Lista de exercícios

## Lista 11 – autovalores reais



# Autovalores complexos

## Autovalores complexos

Considere um sistema homogêneo de EDOs lineares

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

Se a matriz A é real, os autovalores complexos surgirão como pares conjugados do tipo $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$.

Adicionalmente, os autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ associados também serão complexos.

Neste caso, as soluções do sistema homogêneo de EDOs lineares serão

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \overline{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} e^{\overline{r}_1 t}$$

## Autovalores complexos

A partir destas soluções complexas é possível encontrar duas soluções reais correspondentes aos autovalores $r_1$ e $r_2$.

Escrevendo $\xi^{(1)}$ = **a** + i**b** onde **a** e **b** são reais, então

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\alpha+i\beta)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t).\end{aligned}$$

Separando a parte real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, obtemos

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t).$$

Escrevendo $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, obtemos os vetores

$$\mathbf{u}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t),$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)$$

Que são soluções reais e LI do sistema de EDOs (ver prob 27: 7.6 Boyce).

## Autovalores complexos

Observe que autovalores complexos conjugados do tipo $\alpha \pm i\beta$, exigem o emprego de apenas uma das raízes $r_1 = \alpha + i\beta$ ou $r_2 = \alpha - i\beta$.

Cada um destes autovalores gera o mesmo conjunto de autovertores reais e LI, com apenas a diferença nos sinais.

Portanto, basta escolher uma das raízes $r_1$ ou $r_2$, obter seu autovetor correspondente e extrair **u** e **v**.

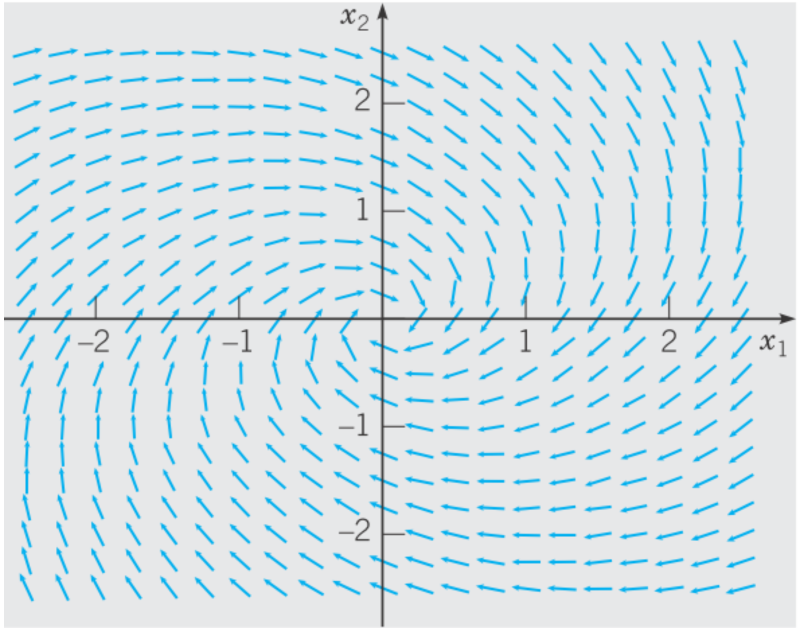
# Autovalores complexos

**Exemplo 3:** Encontre o conjunto fundamental de soluções reais do sistema e mostre-o graficamente:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

**Solução:** Com auxílio de um SCA obtém-se:

Perceba como, neste caso, as soluções tendem a convergir para a origem!



Para encontrar explicitamente a solução empregamos

$$(A-\lambda I)\vec{\alpha}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

A solução não trivial é obtida fazendo det (A) = 0.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-r \end{vmatrix} = r^2 + r + \frac{5}{4} = 0;$$

Cujas raízes são $r_1 = -1/2 + i$ e $r_2 = -1/2 - i$, que são os autovalores.

Que geram os autovetores

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Observe que os autovalores são complexos conjugados, assim obtém-se duas soluções linearmente independentes, que contém parte real e imaginária.

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2-i)t}.$$

Para encontrar um conjunto de soluções reais, precisamos encontrar as partes real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}$ ou $\mathbf{x}^{(2)}$ . Escolhendo $\mathbf{x}^{(1)}$ obtém-se:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t/2}(\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2}\cos t \\ -e^{-t/2}\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t/2}\sin t \\ e^{-t/2}\cos t \end{pmatrix}.$$

Perceba que basta empregar um dos autovalores e o correspondente autovetor. Portanto,

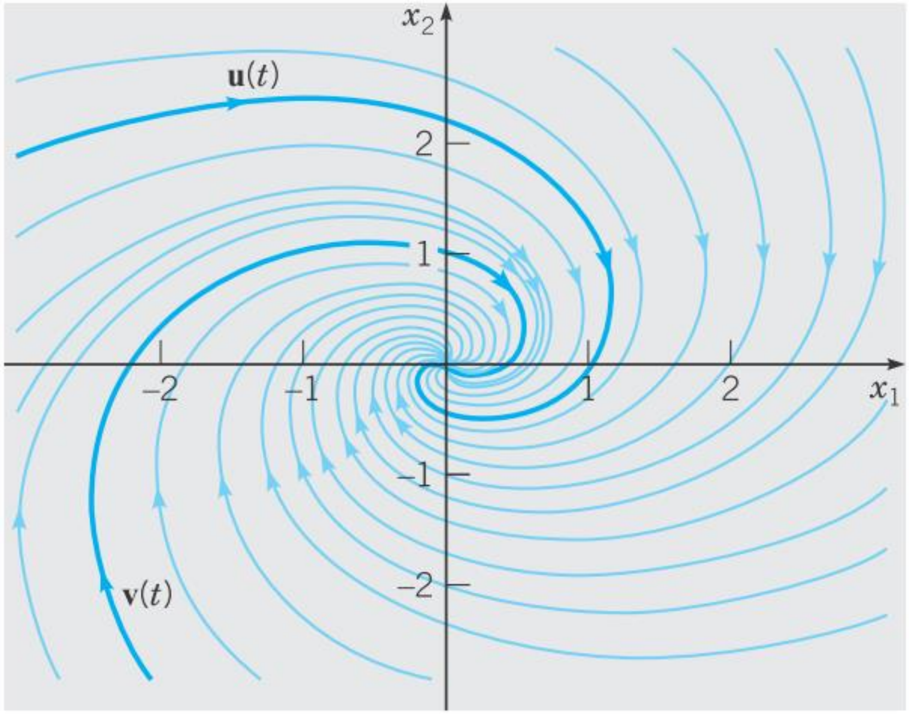
$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

# Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

A figura abaixo permite a visualização da solução, que pode ser esboçada com auxílio dos autovalores e autovetores.

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2}\begin{pmatrix}\cos t \\ -\sin t\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{-t/2}\begin{pmatrix}\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}$$




Solução geral

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t/2}\begin{bmatrix}\cos t \\ -sent\end{bmatrix} + c_2 e^{-t/2}\begin{bmatrix}sent \\ \cos t\end{bmatrix}$$

Os gráficos de **u**(t) e **v**(t) contêm os pontos (1, 0) e (0, 1) respectivamente. Outras soluções do sistema são combinações lineares e **u**(t) e **v**(t).

Esta figura é um exemplo de um sistema cujos autovalores são complexos conjugados com parte real negativa.

## Cuidado no projeto

Em todo sistema **x' = Ax** que representa um sistema real os coeficientes presentes na matriz **A** representam propriedades físicas dos componentes, como as constantes das molas e amortecedores ou a especificação dos resistores, capacitores e indutores em uma malha RLC.

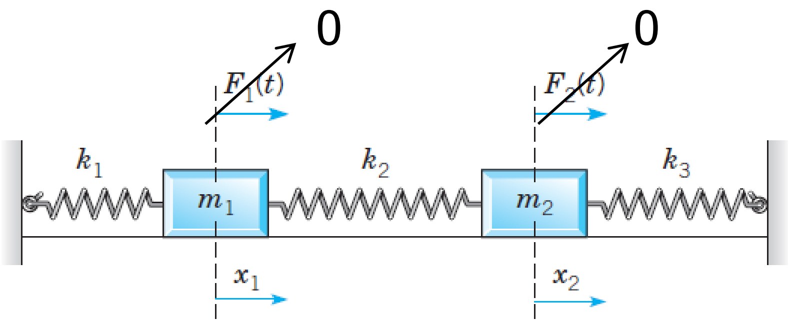
Como todos estes componentes estão sujeitos a variações no processo de fabricação é possível que um sistema projetado para ter um comportamento previsto para autovalores reais passe a ter um comportamento de autovalores complexos.

Portanto, evite especificações que estejam próximas à transição real <-> imaginária ou na qual os autovalores imaginário possuem a parte real igual a zero. Nestes casos, pequenas variações nos coeficientes podem levar um projeto estável a apresentar um comportamento totalmente imprevisto e até mesmo perigoso para os usuários do produto final.

**Exemplo 4:** Suponha que $m_1$ = 2, $m_2$ = 9/4, $k_1$ = 1, $k_2$ = 3 e $k_3$ = 15/4 nas equações do sistema massa mola

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2,$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2.$$




Que pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem

$$y_1' = y_3, \qquad y_2' = y_4,$$

and, from Eqs. (22),

$$m_1 y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2, \qquad m_2 y_4' = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2.$$

Mantenha em mente que $y_1$ e $y_2$ são as posições das duas massas e $y_3$ e $y_4$ são as suas velocidades.

# Autovalores complexos

Substituindo os valores das constantes obtém-se

$$y_1' = y_3, \qquad y_2' = y_4, \qquad y_3' = -2y_1 + \tfrac{3}{2}y_2, \qquad y_4' = \tfrac{4}{3}y_1 - 3y_2.$$

Que na forma matricial é equivalente a

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Cujo polinômio característico é

$$r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2 + 1)(r^2 + 4)$$

Com autovalores (raízes) $r_1 = i, r_2 = -i, r_3 = 2i,$ and $r_4 = -2i.$

# Autovalores complexos

Através dos autovalores obtém-se os autovetores

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3i \\ -2i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6i \\ 8i \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Como as soluções complexas $\xi^{(1)}e^{it}$ e $\xi^{(2)}e^{it}$ são complexas conjugados, é possível encontrar duas soluções reais e imaginárias a partir de qualquer uma delas.

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{it} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\cos t \\ -3\sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\sin t \\ 2\sin t \\ 3\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(1)}(t) + i\mathbf{v}^{(1)}(t).$$

# Autovalores complexos

De forma análoga para $\xi^{(3)}e^{2it}$ e $\xi^{(4)}e^{2it}$ temos:

$$\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{2it} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos 2t \\ -4\cos 2t \\ -6\sin 2t \\ 8\sin 2t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 3\sin 2t \\ -4\sin 2t \\ 6\cos 2t \\ -8\cos 2t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(2)}(t) + i\mathbf{v}^{(2)}(t).$$

# Autovalores complexos

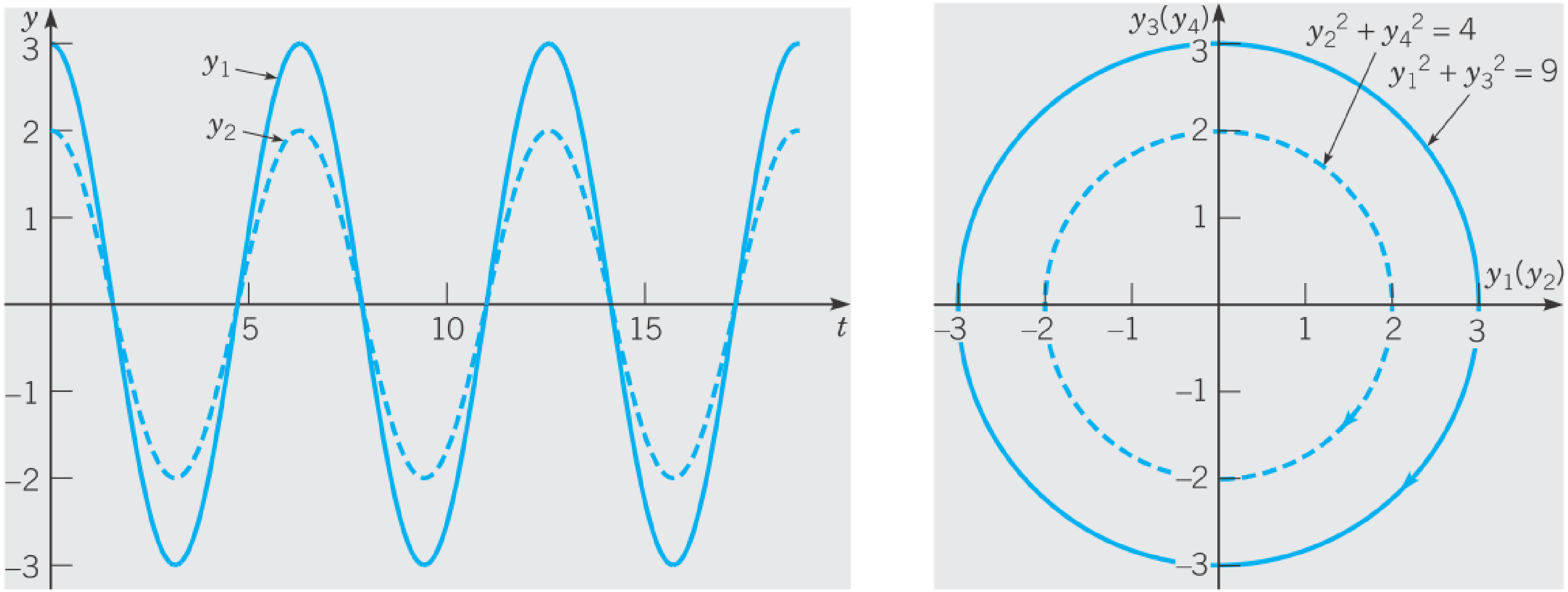
Assim, a solução geral é :

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\cos t \\ -3\sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\sin t \\ 2\sin t \\ 3\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3\cos 2t \\ -4\cos 2t \\ -6\sin 2t \\ 8\sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3\sin 2t \\ -4\sin 2t \\ 6\cos 2t \\ -8\cos 2t \end{pmatrix},$$

Lembre-se que $y_1$ e $y_2$ são as posições das duas massas e $y_3$ e $y_4$ são as suas velocidades.

# Autovalores complexos

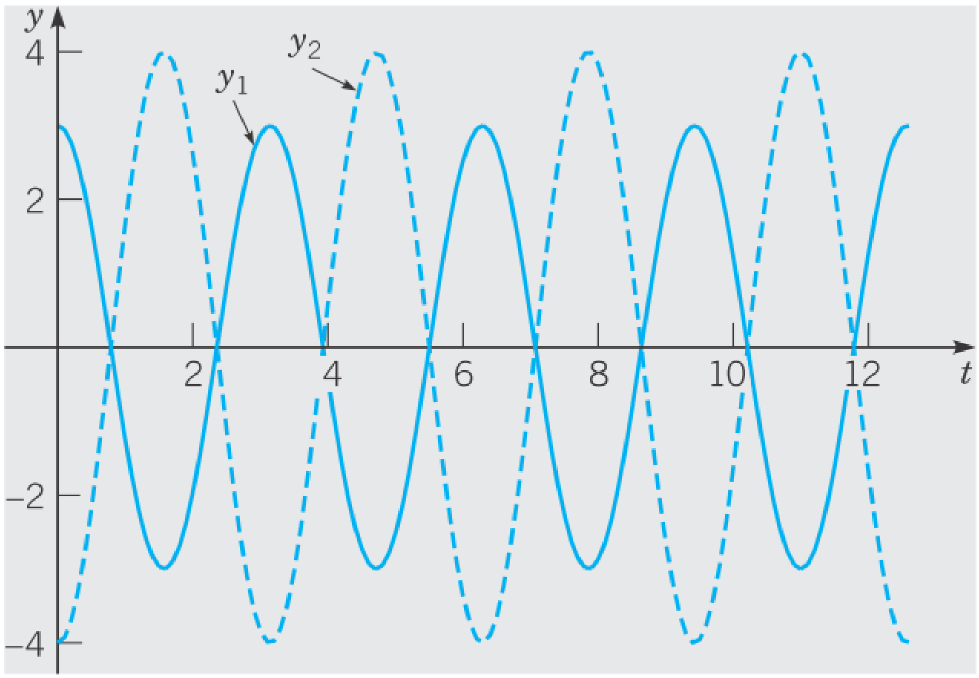
Modo fundamental para a solução do primeiro par conjugado $r_1 = \pm i$:



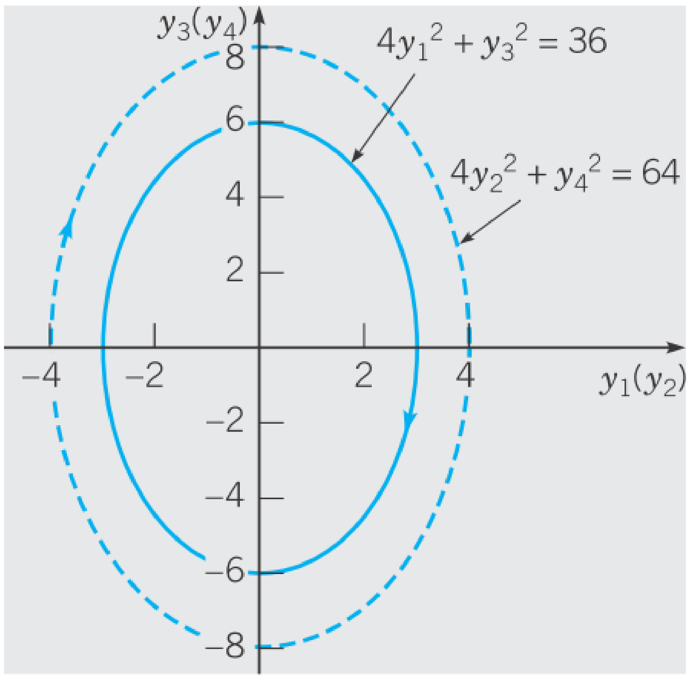

(a) (b)

**FIGURE 7.6.3** (*a*) A plot of $y_1$ versus $t$ and $y_2$ versus $t$ for the solution $\mathbf{u}^{(1)}(t)$. (*b*) Superposition of projections of trajectories in the $y_1y_3$- and $y_2y_4$-planes for the solution $\mathbf{u}^{(1)}(t)$.

Modo fundamental do segundo par conjugado $r_2 = \pm 2i$:



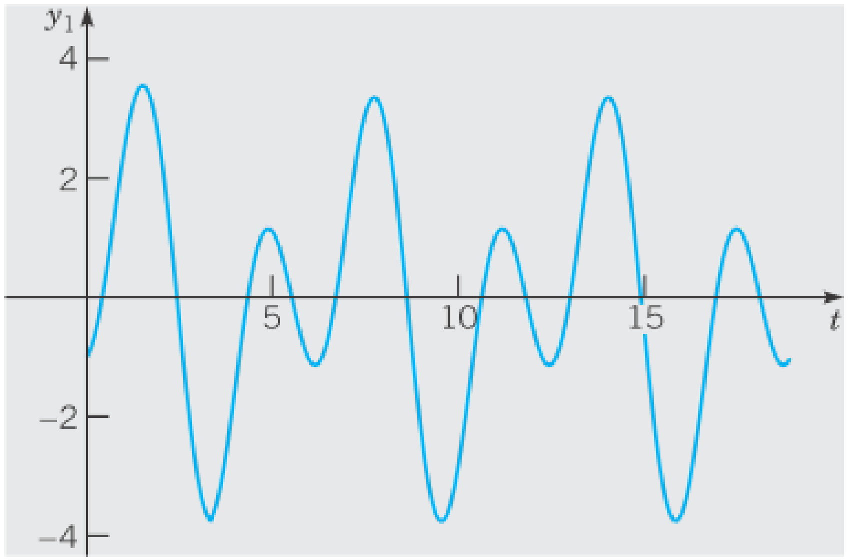

(a)



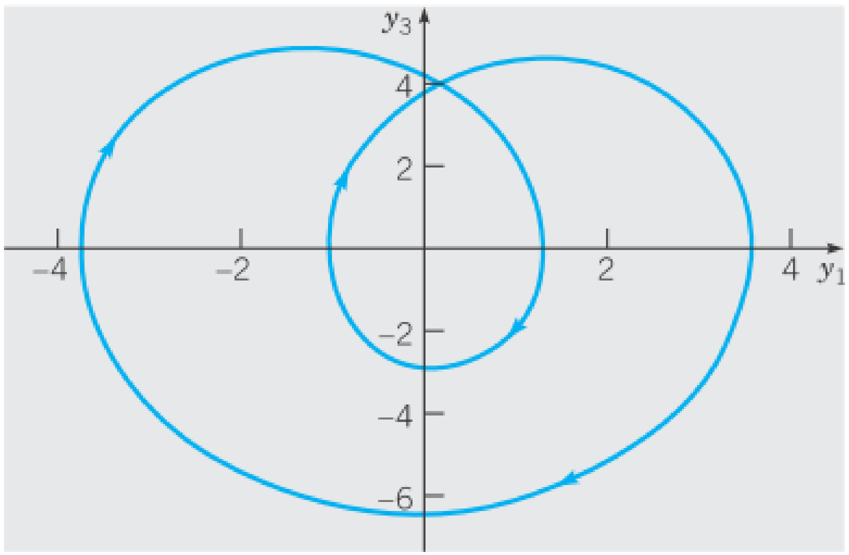

(b)

# Autovalores complexos

Combinando os dois modos fundamentais, temos um exemplo das diferentes possibilidades que podem ocorrer.

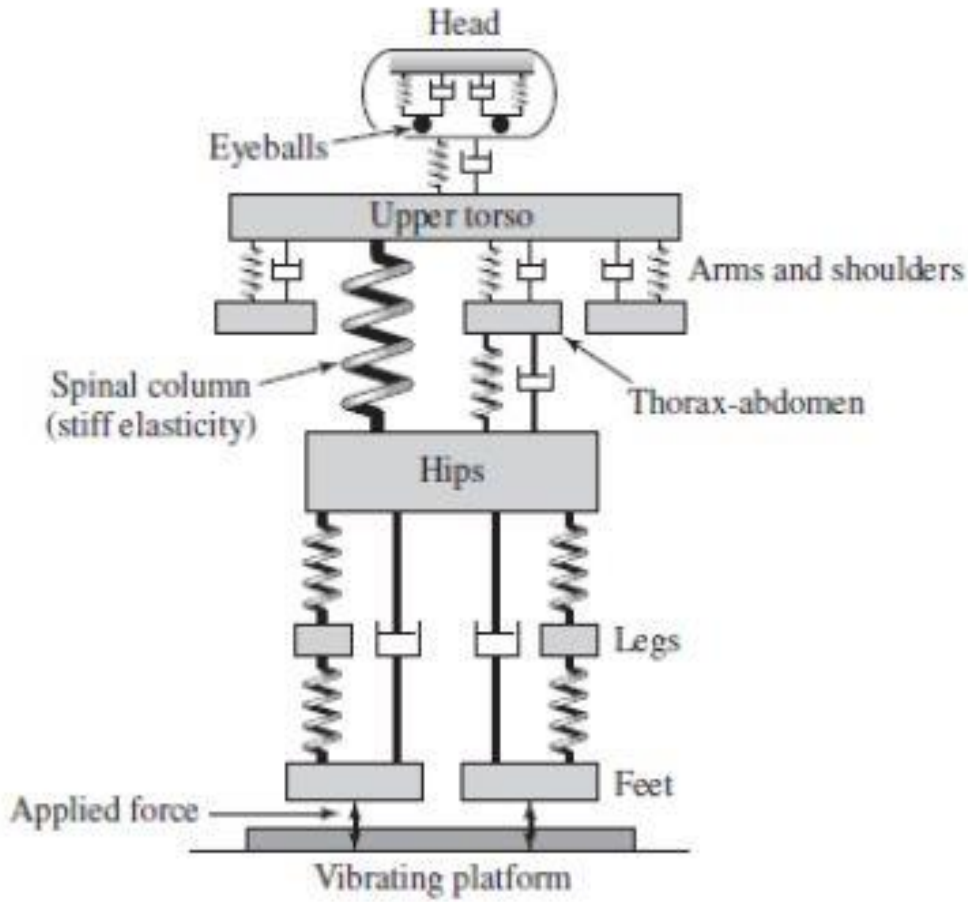



(a)




(b)

# Desafio



Head
Eyeballs
Upper torso
Arms and shoulders
Spinal column
(stiff elasticity)
Thorax-abdomen
Hips
Legs
Feet
Applied force
Vibrating platform

# Desafio

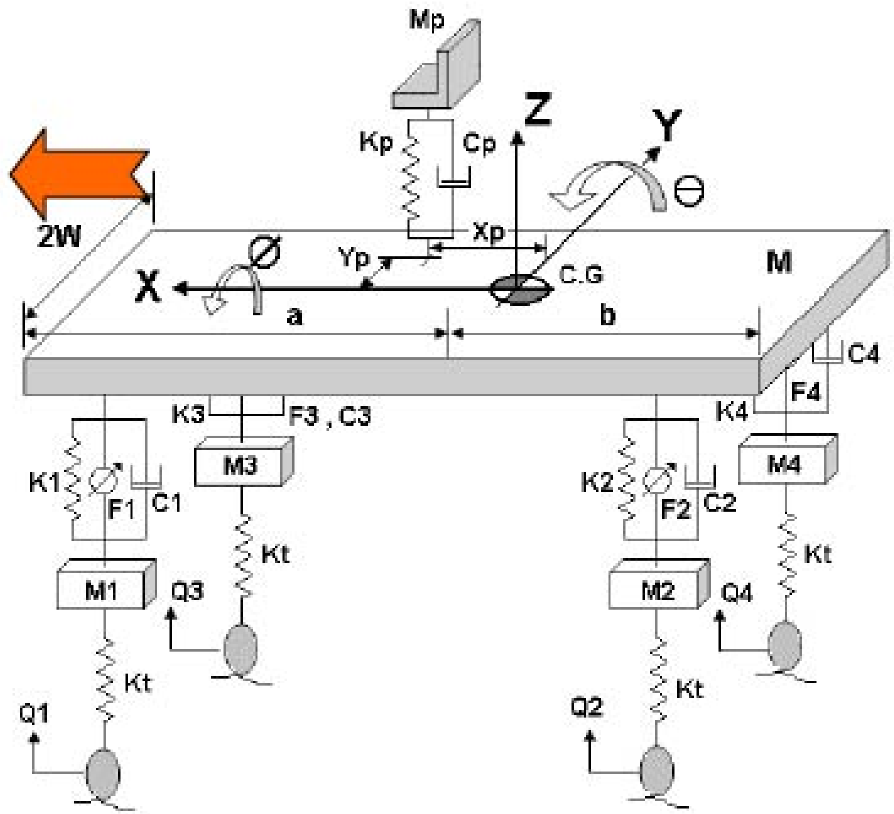
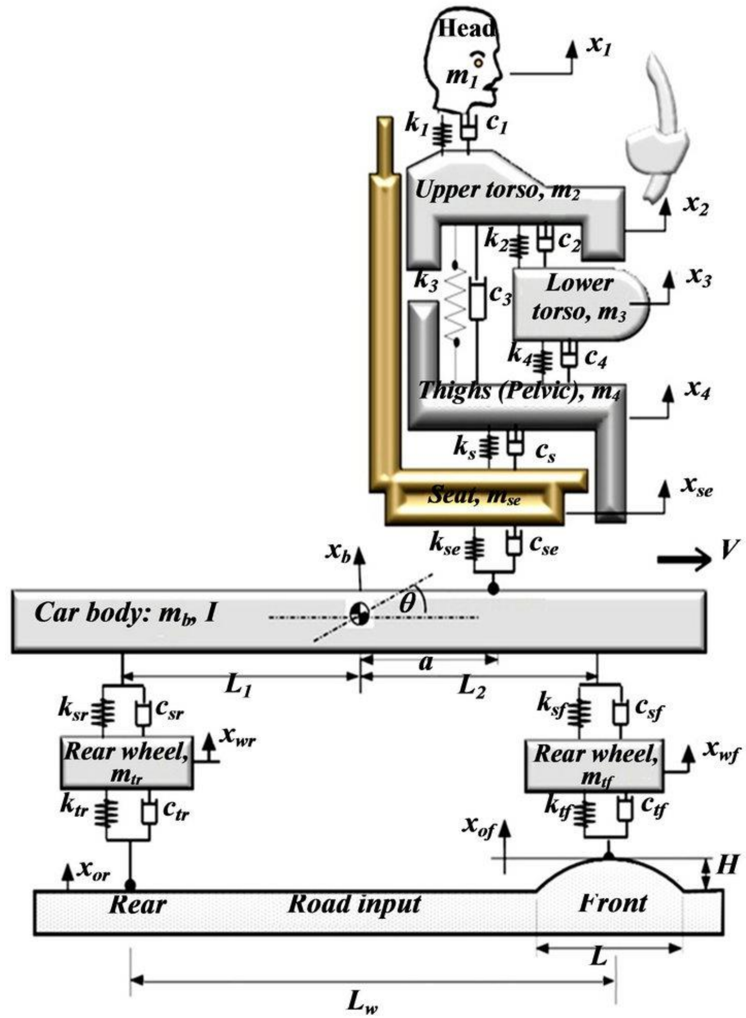



Figure 1. Full car model.

# Desafio

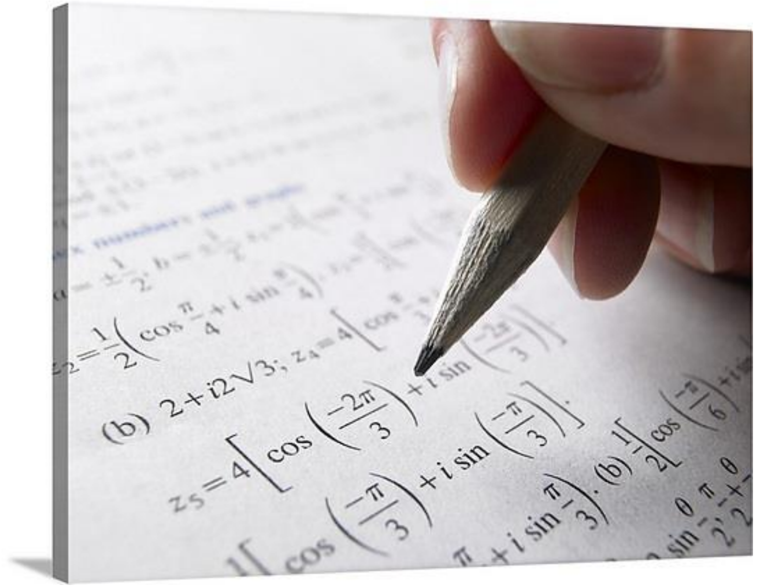
z
y
x

Head
$m_1$
$x_1$
$k_1$ $c_1$
Upper torso, $m_2$
$x_2$
$k_2$ $c_2$
$k_3$ $c_3$
Lower torso, $m_3$
$x_3$
$k_4$ $c_4$
Thighs (Pelvic), $m_4$
$x_4$
$k_s$ $c_s$
Seat, $m_{se}$
$x_{se}$
$k_{se}$ $c_{se}$
$x_b$
$\theta$
V
Car body: $m_b$, I
a
$L_1$
$L_2$
$k_{sr}$ $c_{sr}$
Rear wheel, $m_{tr}$
$x_{wr}$
$k_{tr}$ $c_{tr}$
$k_{sf}$ $c_{sf}$
Rear wheel, $m_{tf}$
$x_{wf}$
$k_{tf}$ $c_{tf}$
$x_{of}$
H
$x_{or}$
Rear
Road input
Front
L
$L_w$

# Lista de exercícios

**Lista 11 completa e inicio da 12.**



# Séries e Equações Diferenciais

## Unidade 15

## Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem – Parte III

Prof. Diogo Lôndero da Silva

# Sistemas não-homogêneos

## Matrizes fundamentais

Suponha que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ são um conjunto fundamental de soluções para

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

Então a matriz

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

É uma matriz fundamental do sistema (1), que apresenta as seguintes propriedades.

- $\det \psi(t) \neq 0$ Pois os vetores coluna são LI, logo $\psi^{-1}(t)$ existe.
- $\psi'(t) = P(t)\psi(t)$

## Sistemas lineares não homogêneos

O sistema não homogêneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t),$$

Apresenta solução geral na forma

$$\mathbf{x} = \underbrace{c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)}_{\text{Solução do sistema homogêneo}} + \mathbf{v}(t),$$

Solução particular

Solução do sistema homogêneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

Portanto, após determinada a solução homogênea o trabalho consistem em encontrar **v**(t).

## Método 1: Variação de parâmetros

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \qquad (1)$$

Dada a matriz fundamental $\Psi(t)$ do sistema homogêneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \qquad (2)$$

É possível escrever a solução homogênea na forma **x** = $\Psi$(t)**c**, onde **c** é um vetor de constantes.
Este método consiste em encontrar uma solução do sistema não homogêneo substituindo o vetor constante **c** por uma função vetorial **u**(t), obtendo-se

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t), \qquad (3)$$

A eq (3) representa a solução geral do sistema (1)

# Sistemas não homogêneos

## Método 1: Variação de parâmetros

Substituindo (3) e suas derivadas em (1)

$$\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \qquad (4)$$

Como $\Psi$(t) é uma matriz fundamental, $\psi'(t) = P(t)\psi(t)$, assim

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t). \qquad (5)$$

Como a inversa de $\Psi$(t) existe, é possível obter

$$\boxed{\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t).} \qquad (6)$$

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}, \qquad (7)$$

# Sistemas não homogêneos

## Método 1: Variação de parâmetros

Quando esta integral existir, obtém-se a solução substituindo (7) em (3)

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c} + \boldsymbol{\Psi}(t)\int_{t_1}^{t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds, \qquad (8)$$

**Exemplo:**

Encontre a solução do problema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t).$$

A solução geral é proposta como

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{u}(t),$$

# Sistemas não homogêneos

## Método 1: Variação de parâmetros

A solução homogênea é empregada para obter a matriz fundamental

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{u}'(t) = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t).$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Invertendo a matriz $\psi(t)$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t} \\ \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} u_1' &= e^{2t} - \tfrac{3}{2}te^{3t}, \\ u_2' &= 1 + \tfrac{3}{2}te^{t}. \end{aligned}$$

## Método 1: Variação de parâmetros

Integrando as duas equações anteriores obtém-se

$$\underbrace{\begin{aligned} u_1(t) &= \tfrac{1}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}te^{3t} + \tfrac{1}{6}e^{3t} + c_1, \\ u_2(t) &= t + \tfrac{3}{2}te^{t} - \tfrac{3}{2}e^{t} + c_2, \end{aligned}}$$

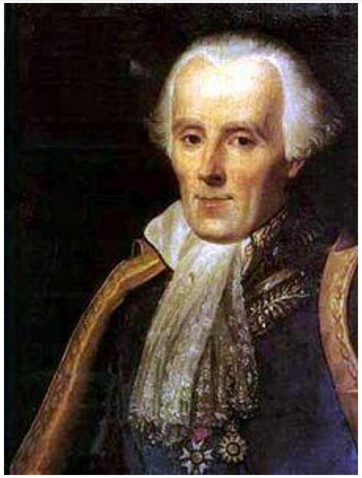
Para obter a solução geral

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\boxed{\mathbf{u}(t),}$$

$$\mathbf{x} = \underbrace{c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}}_{\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}}_{\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\tilde{\mathbf{u}}(t)},$$

**u**(t) sem as ctes

## Método 2: Transformadas de Laplace



Como a transformada de Laplace é uma integral, a transformada de um vetor é calculada componente a componente. Logo $L\{\mathbf{x}(t)\}$ é o vetor cujos componentes são as transformadas dos componentes de $\mathbf{x}(t)$.

**Exemplo:**

Resolva

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \qquad (1)$$

Aplicando a transformada de Laplace em cada termo

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}(s), \qquad (2)$$

## Método 2: Transformadas de Laplace

Onde **G**(s) é a transformada de **g**(t), expressa por

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} 2/(s+1) \\ 3/s^2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Para simplificar a solução, vamos assumir que **x**(0) = **0**, resultando em

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s), \qquad (4)$$

Desta forma X(s) é expresso por

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{G}(s). \qquad (5)$$

Sendo que, neste exemplo

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

## Método 2: Transformadas de Laplace

Realizando a inversão da matriz anterior

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Substituindo (7) e (3) em (5), obtém-se

$$\mathbf{X}(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}+\dfrac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)^2(s+3)}+\dfrac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

## Método 2: Transformadas de Laplace

Aplicando a transformada inversa em (8) obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

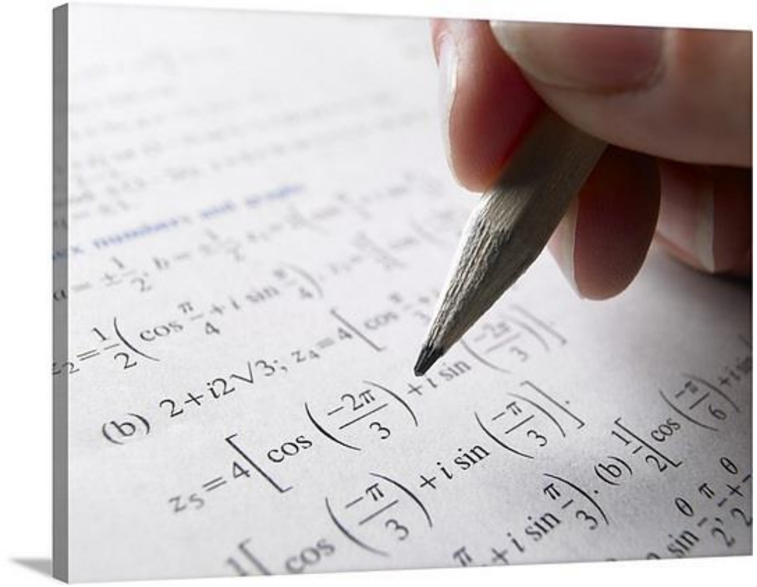
Essa é a resposta que atende a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Para obter a solução geral, deve-se somar a esta resposta a solução do sistema homogêneo associado.

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}}_{\text{Solução homogênea}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{Solução particular}}.$$

# Lista de exercícios

**Lista 12 completa.**



# Referências bibliográficas

**Básica:**


- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; IÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.


**Complementar:**


- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2