Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 5

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Prof. Diogo Lôndero da Silva

Sumário

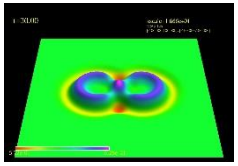
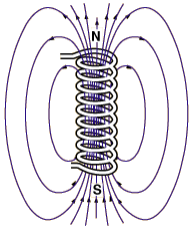
Aplicações a serem investigadas

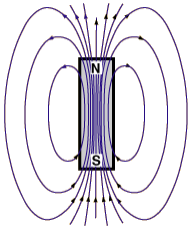
1. Motivação
2. Equações lineares de segunda ordem (forma geral)
3. Soluções
4. Método de solução de EDO de segunda ordem linear, homogênea com coeficientes constantes.
5. Método de solução da equação de Euler-Cauchy (EDO de segunda ordem linear, homogênea, com coeficientes variáveis).

Introdução

Motivação

1. ED de segunda ordem apresentam uma estrutura teórica rica;
2. Uma parte substancial desta estrutura pode ser compreendida com um nível matemático relativamente elementar;
3. EDs de segunda ordem são essenciais para qualquer estudo sério das diferentes áreas da física matemática;
4. Não se pode ir muito longe no desenvolvimento de mecânica dos fluidos, condução de calor, movimento ondulatório ou fenômenos de eletromagnetismos sem esbarrar em EDs de segunda ordem.



Equações lineares de segunda ordem

Introdução

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem tem a forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \qquad 1$$

A Eq. 1 **será linear** se a função *f* apresentar a forma:

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = -p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y + g(t)$$

Ou seja, a eq.1 é linear em y e y', uma vez que g, p e q dependem apenas de *t*.

Permitindo que a eq. 1 seja reescrita como:

2 $P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=G(t)$ ou $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ 3

4

Equações lineares de segunda ordem

Introdução

Um problema de valor inicial consiste em uma equação como as eqs. (2) ou (3)

2 $P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=G(t)$ $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ 3

junto com as condições inicias:

$y(t_0)=y_0$ e $y'(t_0)=y'_0$ 4

Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam apenas um ponto particular (t_0, y_0), mas também o coeficiente angular y'_0 da reta tangente naquele ponto. **Duas constantes exigem duas condições iniciais.**

Equações lineares de segunda ordem

Introdução

Uma equação linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função g(t) na Eq. 3 ou a função G(t) na Eq. 2 forem iguais a zero para todo t. Caso contrário, será uma equação **não-homogênea**. Por este motivo os termos g(t) e G(t), muitas vezes são chamados de termos não homogêneos.

Iniciaremos nossa discussão com equações lineares de segunda ordem. Reescrevendo a Eq. 2 com G(t)=0 obtem-se:

$$P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0 \qquad \boxed{5}$$

Mais adiante veremos que a solução de uma equação não-homogênea exige a solução da equação homogênea correspondente. Por este motivo, a solução da equação homogênea é mais fundamental.

Solução

Antes de resolvermos a eq. 5 vamos refletir sobre as possíveis soluções da equação

$$y'' - y = 0 \qquad \boxed{7}$$

Pergunta: Qual função cuja segunda derivada (y'') é igual a ela mesma (y')?

R: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$

Também serão respostas, quaisquer combinações lineares do tipo:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$ Verifique!

Equações lineares de segunda ordem

Dois fatos básicos permitem-nos resolver equações lineares **homogêneas**. O primeiro é que, se conhecermos duas soluções y_1 e y_2 de tal equação, então a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também é uma solução.

3 Teorema Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ambas soluções da equação linear homogênea 2 e c_1 e c_2 são constantes quaisquer, então a função

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

é também uma solução da Equação 2.

O outro fato de que precisamos é dado pelo seguinte teorema. Ele diz que a solução geral é uma combinação linear de duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2.

Equações lineares de segunda ordem

Isso significa que nem y_1 nem y_2 são múltiplos por constantes um do outro. Por exemplo: as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$ são linearmente dependentes, mas $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$ são linearmente independentes.

4 Teorema Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes da Equação 2 em um intervalo, e $P(x)$ nunca for 0, então a solução geral será dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O Teorema 4 é muito útil, pois diz que, se conhecermos duas soluções particulares linearmente independentes, então conheceremos todas as soluções.

Em geral, não é fácil descobrir soluções particulares de uma equação linear de segunda ordem.

Wronskiano

O Wronskiano também pode ser empregado para determinar se duas funções são linearmente independentes (L.I.)

Para duas funções y_1 e y_2, o Wronskiano é definido pelo determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' :$$

y_1 e y_2 serão L.I. se $W \neq 0$.

Ex:

$$W(e^t, e^{-t}) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^t e^{-t} - e^t e^{-t} = -2$$

Como $W \neq 0$, $y_1 = e^t$ e $y_2 = e^{-t}$ são L.I. para qualquer valor de t!

Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Neste momento inicial, a nossa atenção será concentrada nas equações nas quais as funções P, Q e R são constantes. Neste caso a Eq. 5 torna-se

$$ay''+by'+cy=0 \qquad \boxed{6}$$

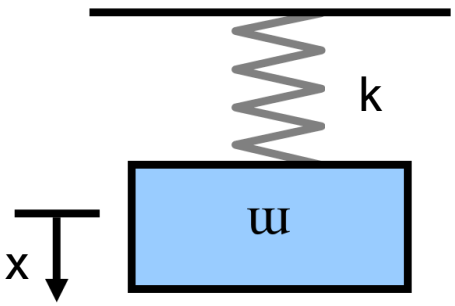
$$P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0 \qquad \boxed{5}$$

e sempre será possível descobrir duas soluções particulares linearmente independentes, que permitirão determinar a solução geral.

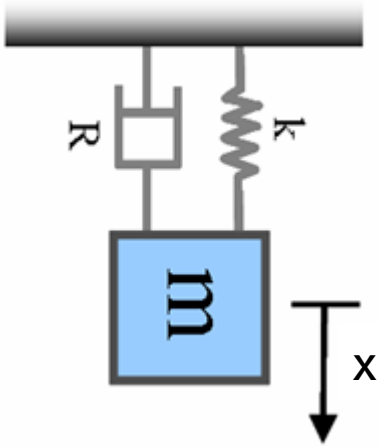
Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Aplicações



Sistema massa mola



Sistema massa mola amortecido

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum F$$

Segunda lei de Newton

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \boxed{6} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - R\frac{dx}{dt}$$

Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Estamos procurando uma função y tal que uma constante vezes sua segunda derivada y'' mais outra constante vezes y' mais uma terceira constante vezes y é igual a 0.

Como vimos, a função exponencial $y = e^{rx}$ é forte candidato a solução pois:

$$y' = re^{rx} \qquad e \qquad y'' = r^2e^{rx}.$$

Se substituirmos essas expressões na Equação 6, veremos que $y = e^{rx}$ é uma solução se

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + cer^x = 0$$

ou

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Mas e^{rx} nunca é 0. Assim, $y = e^{rx}$ é uma solução da Equação 6 se r é uma raiz da equação

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad \boxed{7}$$

é denominada **equação auxiliar** (ou **equação característica**) da equação diferencial ay'' + by' + cy = 0. Observe que ela é uma equação algébrica que pode ser obtida da equação diferencial substituindo-se y'' por r^2, y' por r, e y por 1. (Verifique!)

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Algumas vezes as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar podem ser determinadas por fatoração. Em outros casos, elas são encontradas usando-se a fórmula quadrática (Fórmula de Bháskara):

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (8)$$

Separamos em três casos, de acordo com o sinal do discriminante $b^2 - 4ac$.

Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

CASO I: $b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são reais e distintas, logo

$$\boxed{9} \quad y_1 = e^{r_1 x} \qquad y_2 = e^{r_2 x} \quad \boxed{10}$$

são duas soluções linearmente independentes da Equação 6. Portanto, pelo Teorema 4, temos o seguinte fato:

8 Se as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem reais e distintas, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo CASO I: $b^2 - 4ac > 0$

Resolva a equação $y'' + 3y' + 2y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é $r^2 + 3r + 2 = (r + 1)(r + 2) = 0$

cujas raízes são r = -1, -2. Portanto, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

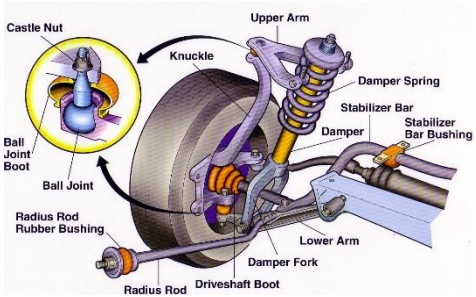
Poderíamos verificar que isso é de fato uma solução derivando e substituindo na equação diferencial

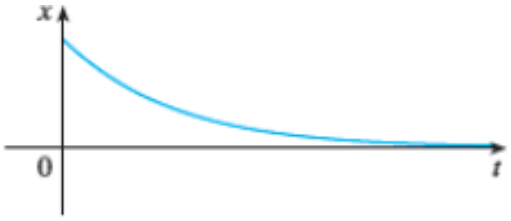
Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

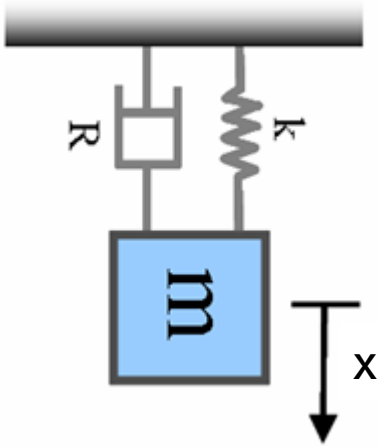
Exemplo CASO I: $b^2 - 4ac > 0$ (superamortecido)

Os gráficos característicos de *x* como função de *t* estão mostrados na Figura 4. Observe que não ocorrem oscilações.





(a) Superamortecimento



Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

CASO II: $b^2 - 4ac = 0$

Neste caso $r_1 = r_2$; isto é, as raízes da equação auxiliar são reais e iguais. Vamos denotar por r o valor comum de r_1 e r_2. Então, das Equações 8, temos:

$$r = -\frac{b}{2a} \qquad \text{então} \quad 2ar + b = 0$$

Sabemos que $y_1 = e^{rx}$ é uma solução da Equação 6. Agora verifiquemos que $y_2 = xe^{rx}$ também é uma solução:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$

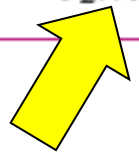
Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

CASO II: $b^2 - 4ac = 0$

O primeiro termo é 0, pois 2ar+b=0 ; o segundo termo é 0, pois r é uma raiz da equação auxiliar. Uma vez que $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ são soluções linearmente independentes, o Teorema 4 nos fornece a solução geral.

10 Se a equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tem apenas uma raiz real r, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$



Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo CASO II: $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$

Resolva a equação $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é $4r^2 + 12r + 9 = 0$ pode ser fatorada como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

de modo que a única raiz é $r = -\frac{3}{2}$. Por [10], a solução geral é

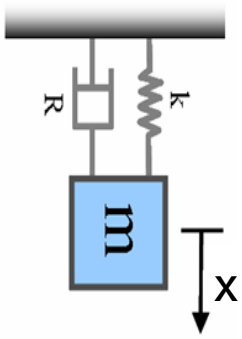
$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$$

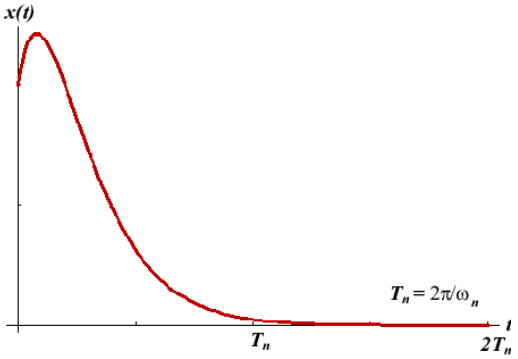
Equações lineares de segunda ordem

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo CASO II: **$b^2 - 4ac = 0$ (Amortecimento crítico)**

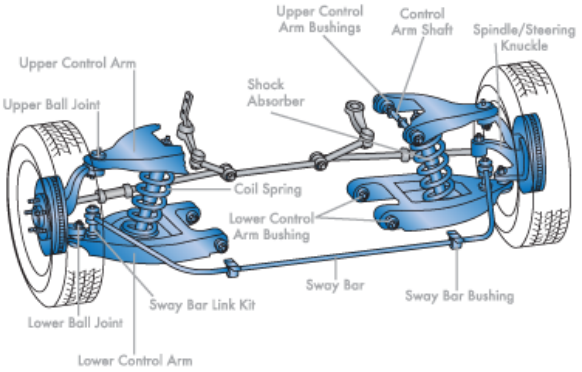
O amortecimento é só o suficiente para suprimir as vibrações. Qualquer decréscimo na viscosidade do óleo gera vibrações no sistema.





(b) Amortecimento crítico

FIGURA 4



Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

CASO III: $b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são números complexos. Podemos escrever

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

onde α e β são números reais. [Na verdade, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] Então, usando a equação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

CASO III: $b^2 - 4ac < 0$

Escrevemos a solução da equação diferencial como

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x)$$

$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen} \beta x]$$

$$= e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

onde $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$.

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

CASO III: $b^2 - 4ac < 0$

Isso nos dá todas as soluções (reais ou complexas) da equação diferencial. As soluções serão reais quando as constantes c_1 e c_2 forem reais. Resumiremos a discussão da seguinte forma:

11 Se as raízes da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ será

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo CASO III: $b^2 - 4ac < 0$

Resolva a equação $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é $r^2 - 6r + 13 = 0$. Pela fórmula quadrática, as raízes são

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por [11], a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$$

Equações lineares de segunda ordem

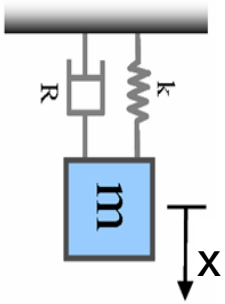
Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo CASO III: **$b^2 - 4ac < 0$ (Subamortecido)**

A solução é dada por

$$x = e^{-(b/m)t}\left(c_1 \cos \omega t + c_2 sen \omega t\right)$$

Vemos que há oscilações amortecidas pelo fator $e^{-(b/m)t}$
Uma vez que $b > 0$ e $m > 0$, temos $-(b/m)t < 0$, logo,
$e^{-(b/m)t} \to 0$ quando $t \to \infty$.



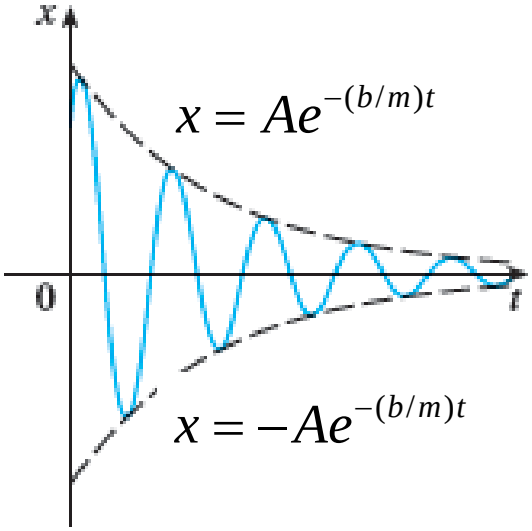


FIGURA 5
Subamortecimento

Equações lineares de segunda ordem

Observações práticas sobre o sistema massa mola amortecido

Como as constantes m (massa), k (mola) e R (amortecedor) da equação abaixo sempre são positivas

$$m\frac{d^2x}{dt} + R\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

As raízes da equação característica sempre serão negativas, pois $R > \sqrt{R^2 - 4mk}$

Logo $r_1, r_2 = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4mk}}{2m}$ sempre resultará em raízes com parte real negativa que geram um exponencial negativo na solução do problema (confira).

Este resultado faz com que o movimento em um sistema amortecido cesse quando $t \to \infty$, confirmando a nossa expectativa de que o amortecimento dissipa gradualmente a energia do sistema.

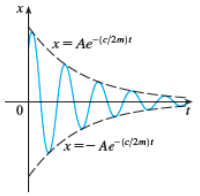
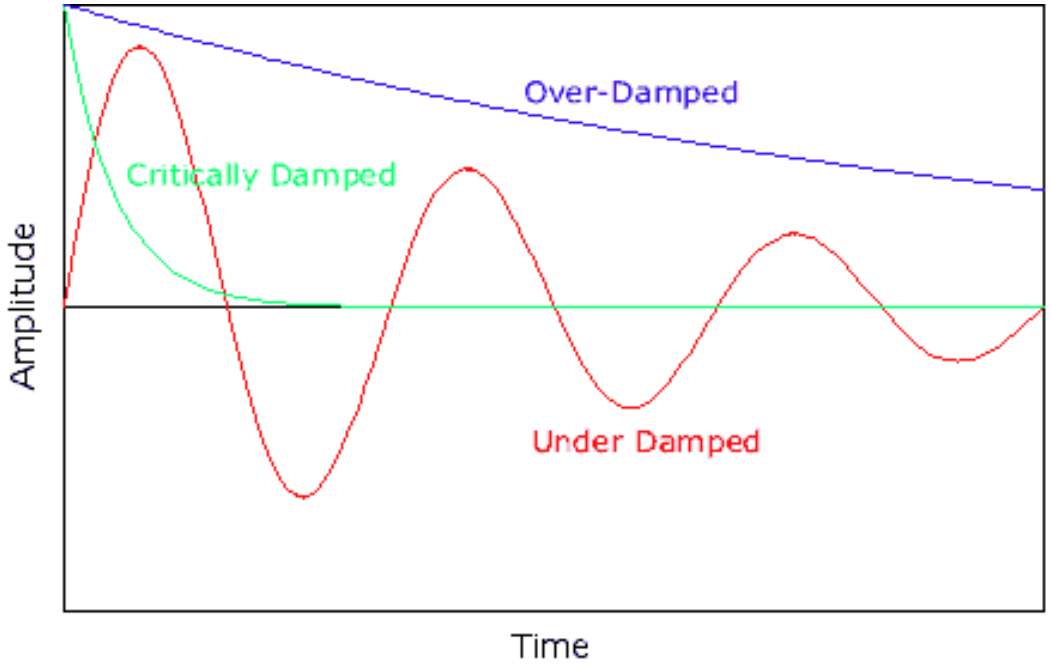


FIGURA 5
Subamortecimento

Equações lineares de segunda ordem

Comparando os três casos



Superamortecido: Muito lento

Amortecimento crítico: Retorna à posição de equilíbrio no menor tempo (pode haver overshoot)

Subamortecido: Permite oscilação que é indesejável em grandes amplitudes.

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Problemas de valores iniciais e valores de contorno

Um **problema de valor inicial** para a Equação 1 ou 2 de segunda ordem consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que satisfaça às condições iniciais da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

onde y_0 e y_1 são constantes. Se P, Q, R e G forem contínuas em um intervalo onde $P(x) \neq 0$, então um teorema encontrado em livros mais avançados garante a existência e a unicidade de uma solução para esse problema de valor inicial.

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Problemas de valores iniciais e valores de contorno

Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUÇÃO: Do exemplo do Caso I, sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Derivando essa solução, obtemos

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Problemas de valores iniciais e valores de contorno

Para satisfazer às condições iniciais exigimos que

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad \boxed{12}$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0 \quad \boxed{13}$$

De $\boxed{13}$, temos $c_2 = \frac{2}{3}c_1$, logo, $\boxed{12}$ resulta em

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

Assim, a solução pedida do problema de valor inicial é

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Problemas de valores iniciais e valores de contorno

Um problema de **valor de contorno** para a Equação 2 ou 3 consiste em determinar uma solução y da equação diferencial que também satisfaça às condições de contorno da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

Em contraste com a situação para problemas de valor inicial, um problema de valor de contorno nem sempre tem uma solução.

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Problemas de valores iniciais e valores de contorno

Resolva o problema de valor de contorno

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuja única raiz é $r = -1$. Além disso, a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Problemas de valores iniciais e valores de contorno

As condições de contorno são satisfeitas se

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

A primeira condição resulta em $c_1 = 1$, de modo que a segunda condição torna-se

$$e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Problemas de valores iniciais e valores de contorno

Isolando c_2 nessa equação, primeiro multiplicando ambos os membros por e, obtém-se

$$1 + c_2 = 3e \quad \text{logo} \quad c_2 = 3e - 1$$

Assim, a solução do problema de contorno é

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$

Equação de Euler-Cauchy

Equações lineares de segunda ordem
Equação de Euler-Cauchy

As **Equações de Cauchy-Euler** são EDOs da forma:

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

que podemos reconhecer como uma E.D.O linear homogênea de segunda ordem, com coeficientes variáveis.

Analisando a equação é razoável supor uma solução da forma

$$y = x^m$$

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Substituindo na E.D.O para achar o valor de m

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

$$(m^2 - m)x^m + amx^m + bx^m = 0$$

Dividindo por x^m

$$m^2 + m(a-1) + b = 0 \qquad \text{(Equação Auxiliar)}$$

Que é uma equação de 2o Grau para m , aplicando Bhaskara

$$m_1 = -\frac{(a-1) + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \qquad m_2 = -\frac{(a-1) - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

Caso 1: As duas raízes são reais e distintas $(a-1)^2 - 4b > 0$

$$m_1 = -\frac{(a-1) + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

$$m_2 = -\frac{(a-1) - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

Temos então duas soluções L.I. (uma para cada valor de *m)*

$$y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

Exemplo 6: Ache a solução da E.D.O. $x^2y'' + 1.5xy' - 0.5y = 0$

Reconhecemos que esta é uma equação de Cauchy-Euler, logo

$$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

O que gera uma equação auxiliar

$$m^2 + 0,5m - 0,5 = 0 \begin{cases} m_1 = 0,5 \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

$m^2 + m(a-1) + b = 0$ (Equação Auxiliar)

o que gera duas soluções (uma para cada *m*)

$$y(x) = c_1 x^{0.5} + c_2 x^{-1}$$

Caso 2: As duas raízes são idênticas $(a-1)^2 - 4b = 0$

Neste caso temos somente uma solução

$$m = -\frac{(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

$$y_1 = x^m = x^{(1-a)/2}$$

Aplicando redução de ordem pode-se chegar a uma segunda solução

$$y = uy_1 \qquad y' = u'y_1 + uy_1' \qquad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

Substituindo na EDO e simplificando chega-se a uma equação para u

$$u'' + \frac{1}{x}u' = 0$$

$$u'' + \frac{1}{x}u' = 0$$

Esta equação pode ser resolvida fazendo $v = u'$ e $v' = u''$

$$v' + \frac{1}{x}v = 0$$

Que é uma EDO linear homogênea de primeira ordem

$$v = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \ln x$$

Logo a segunda solução fica,

$$y_2 = uy_1 = (\ln x)x^{(1-a)/2}$$

Resultando na solução geral

$$y(x) = c_1 x^{(1-a)/2} + c_2 (\ln x)x^{(1-a)/2}$$

Exemplo 7: Ache a solução da E.D.O. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

Reconhecendo esta como uma Equação de Cauchy-Euler, usamos

$$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Substituindo na E.D.O. encontra-se a equação auxiliar,

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 3$$

Logo uma das soluções será

$$y_1 = x^3$$

A segunda solução, encontrada via redução de ordem,

$$y_2 = x^3 \ln x$$

$$y(x) = c_1x^3 + c_2x^3 \ln x$$

Caso 3: As duas raízes são complexas $(a-1)^2 - 4b < 0$

Neste caso as duas soluções imaginárias podem ser combinadas para forma uma solução real

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

O que resulta em uma solução geral

$$y(x) = c_1 x^{\alpha+i\beta} + c_2 x^{\alpha-i\beta}$$

$$y(x) = x^{\alpha}(c_1 x^{i\beta} + c_2 x^{-i\beta})$$

$$x^{i\beta} = \exp\left[\ln(x^{i\beta})\right] \qquad x^{-i\beta} = \exp\left[-i\beta \ln x\right]$$

$$y(x) = x^{\alpha}(c_1 x^{i\beta} + c_2 x^{-i\beta})$$

$$y(x) = x^{\alpha}(c_1 e^{i\beta \ln x} + c_2 e^{-i\beta \ln x})$$

Relembrando das fórmulas de Euler

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Logo, fazendo $c_1 = 1/2$ **e** $c_2 = 1/2$

$$y(x) = x^{\alpha}\left(\frac{e^{i\beta \ln x} + e^{-i\beta \ln x}}{2}\right) = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)$$

Logo, fazendo $c_1 = 1/(2i)$ **e** $c_2 = -1/(2i)$

$$y(x) = x^{\alpha}\left(\frac{e^{i\beta \ln x} - e^{-i\beta \ln x}}{2i}\right) = x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$$

Utilizando estas duas soluções L.I.

$$y(x) = c_1 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) + c_2 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)$$

Exemplo 8: Ache a solução da E.D.O. $x^2y'' + 0.6xy' + 16.04y = 0$

Reconhecendo esta como uma Equação de Cauchy-Euler, usamos

$$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Substituindo na E.D.O. encontra-se a equação auxiliar,

$$m^2 - 0.4m + 16.04 = 0 \left\{ \quad m = \frac{0,4 \pm \sqrt{-64}}{2} = 0,2 \pm 4i \right.$$

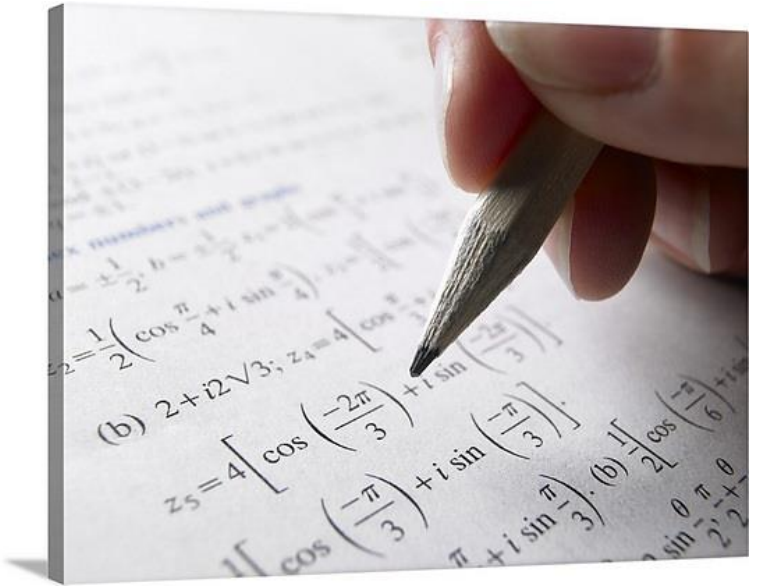
Estas potências de números complexos podem ser reescritas para formar as soluções

$$y_1 = x^{0,2}\cos(4\ln x)$$
$$y_2 = x^{0,2}\sin(4\ln x)$$

$$y(x) = c_1x^{0,2}\cos(4\ln x) + c_2x^{0,2}\sin(4\ln x)$$

Lista de exercícios

Lista 4.



Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; IÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.