



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 10

Séries de Potência

Prof. Diogo Lôndero da Silva



Sumário

1. Séries de potência;
2. Representação de funções como séries de potência;;
3. Séries de Taylor



Séries de Potência



Séries de potência

Em geral, a série da forma

$$[2] \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

É chamada uma **série de potências em $(x-a)$** ou uma **série de potências centrada em a** ou uma **série de potências sobre a** . Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$ nas Equações 1 e 2, adotamos a convenção de que $(x-a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Observe também que, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geq 1$ e assim a série de potências [2] **sempre converge quando $x = a$.**



Séries de potência

Exemplo 2

Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

Empregando o teste da razão

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| = \left| \frac{(x-3)(x-3)^n}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| = \left| \frac{n}{n+1} \cdot (x-3) \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot (x-3) \right| = |x-3| \quad \text{Portanto, converge para } |x-3| < 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente e converge em $2 < x < 4$.

Atenção! Como o teste da razão não garante a convergência nos extremos do intervalo, ou seja, em x igual a 2 e 4, é necessário testar estes valores individualmente.



Séries de potência

O teorema a seguir, diz que isso, em geral, é verdadeiro.

3 Teorema Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$, existem apenas três possibilidades:

- (i) A série converge apenas quando $x = a$.
- (ii) A série converge para todo x .
- (iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

O número R no caso (iii) é chamado **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii).



Séries de potência

A situação é ilustrada na Figura 3.

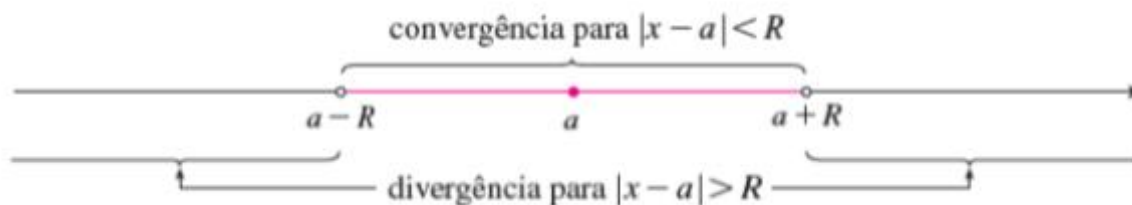


Figura 3

Resumimos aqui o raio e o intervalo de convergência para cada um dos exemplos já considerados nesta seção.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Série geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Exemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$



Séries de potência

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Série geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Exemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

Qual é o centro (a) e os coeficientes (c_n)?



Representações de Funções como Séries de Potências



Representação de funções

Começaremos com uma equação que vimos antes:

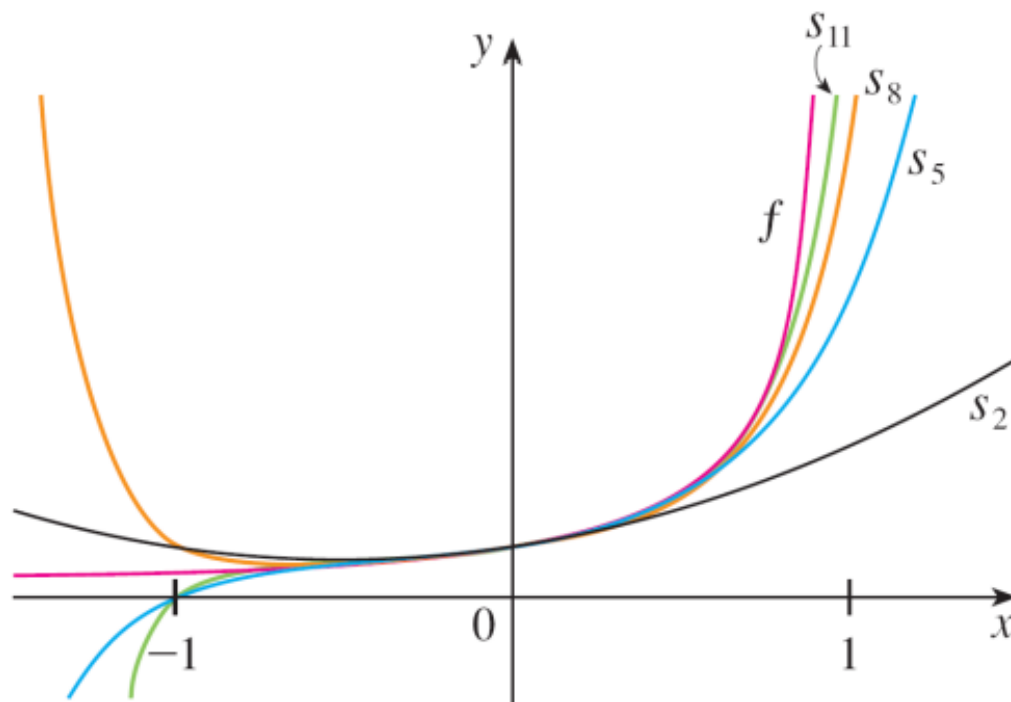
1

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Encontramos essa equação pela observação de que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1-x)$ como uma soma de uma série de potências.



Representação de funções



$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ e algumas somas parciais}$$

Figura 1



Representação de funções

Exemplo

Expresse $1/(1 + x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO: Trocando x por $-x^2$ na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$\frac{1}{1 - x} = \sum x^n$$

Referência



Representação de funções

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$. (É claro que poderíamos ter determinado o raio de convergência aplicando o Teste da Razão, mas todo aquele trabalho é desnecessário aqui.)

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n$$

Referência

$$|x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum (-x^2)^n$$

Exemplo

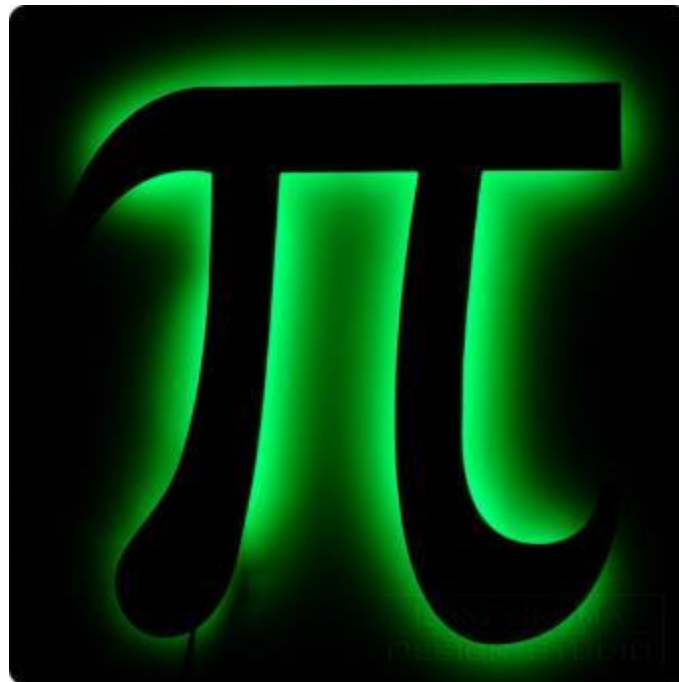
$$|x^2| < 1$$



Representação de funções

Motivação

Como calcular o valor do número pi?





Representação de funções

Motivação

Outro exemplo da utilização de séries na representação de funções permite o cálculo do número π com infinitas casas decimais.

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$



Shigero Kondu e Yee Alexander, em 2011, calcularam o número π com mais de 10 trilhões de casas decimais.





Derivação e Integração de Séries de Potências



Derivação e integração

2 Teorema Se a série de potências $\sum c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a - R, a + R)$ e

$$(i) \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - a)^{n-1}$$

$$(ii) \quad \int f(x) dx = C + c_0(x - a) + c_1 \frac{(x - a)^2}{2} + c_2 \frac{(x - a)^3}{3} + \cdots$$
$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R .



Exemplo 4

Vimos que a função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

é definida por todo x . Então, pelo Teorema 2, J_0 é diferenciável para todo x , e sua derivada é encontrada pela derivação termo a termo, como a seguir:

$$J'_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$



Derivação e integração

Exercício

Expresse a seguinte função como a soma de séries de potência.

a) $f(x) = \arctg(x)$

$$\frac{1}{1+x^2} = (\arctan(x))' = \sum_n (-1)^n x^{2n}$$

Logo

$$\arctg(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum (-1)^n x^{2n} dx = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$



Séries de Taylor



Séries de Taylor

Começaremos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + c_4(x - a)^4 + \cdots \mid x - a \mid < R$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem aparecer em termos de f . Para começar, observe que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos após o primeiro são 0 e teremos

$$f(a) = c_0$$



Séries de Taylor

Podemos derivar a série na Equação 1 termo a termo:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \quad |x-a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora derivamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \quad |x-a| < R$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$



Séries de Taylor

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da série na Equação 3 fornece

$$4 \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \dots \mid x-a \mid < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot nc_n = n!c_n$$



Séries de Taylor

Isolando o n -ésimo coeficiente c_n , nessa equação, obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, demonstramos o teorema a seguir.

5 Teorema Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a , isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad |x - a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$



Séries de Taylor

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a , então ela deve ser da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \boxed{6} \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots \end{aligned}$$

A série na Equação 6 é chamada **série de Taylor da função f em a** (ou **em torno de a** ou **centrada em a**).



Séries de Taylor

Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$7 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.



Séries de Taylor

Exemplo 1

Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO: Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n . Portanto, a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$



Exemplo 1 – Solução

continuação

Para encontrarmos o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

de modo que, pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e o raio de convergência é $R = \infty$.



Séries de Taylor

A conclusão que podemos tirar do Teorema 5 e do Exemplo 1 é que se e^x tiver uma expansão em série de potências em 0, então

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



Séries de Taylor

Listamos na tabela a seguir, para referência futura, algumas séries de Maclaurin importantes que deduzimos nesta seção e na precedente.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad R = \infty$$

$$\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots \quad R = 1$$

Séries de Maclaurin Importantes e Seus Raios de Convergência

Tabela 1



Séries de Taylor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad R = \infty$$

$$\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \dots \quad R = 1$$

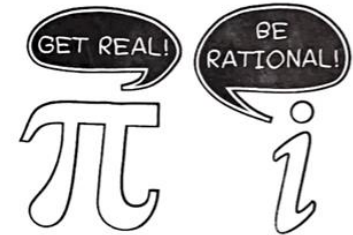
Séries de Maclaurin Importantes e Seus Raios de Convergência



Séries de Taylor

Equação de Euler

Como vimos $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$



Substituindo $x = i\theta$ obtêm-se $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \dots$

Agora $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$. Logo

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

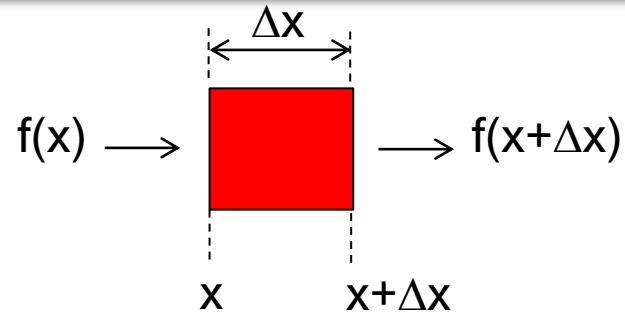
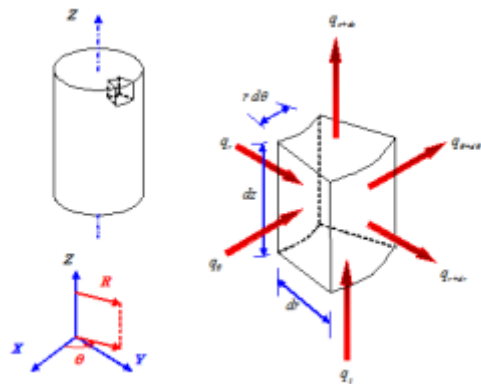
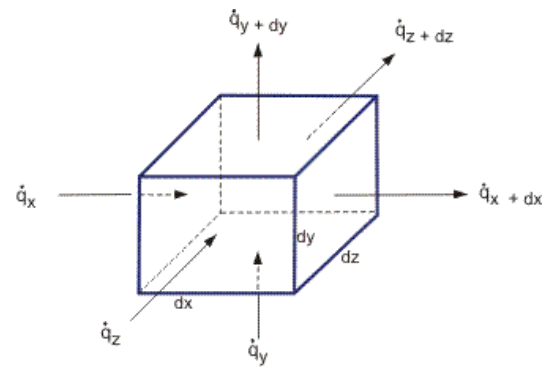
$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Avalie esta equação quando $\theta = \pi$!



Séries de Taylor

Balanços em elementos infinitesimais



1-D

Caso o valor de f seja conhecido em x , o valor em $x+\Delta x$ pode ser estimado através da expansão em séries de Taylor de f .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} (x-a) + \dots$$

Assumindo $a=x$ (centro na face esquerda)

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!} (x + \Delta x - x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!} (x + \Delta x - x)^2 + \dots$$

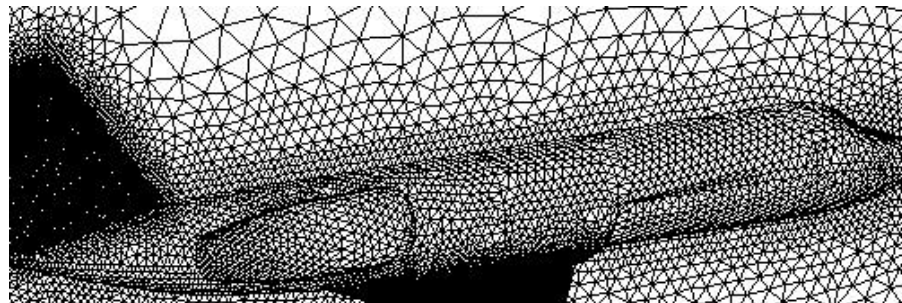
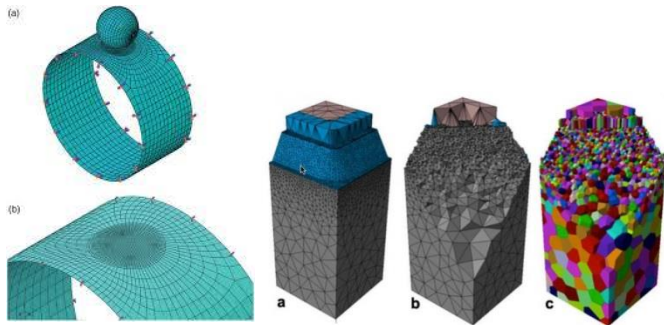
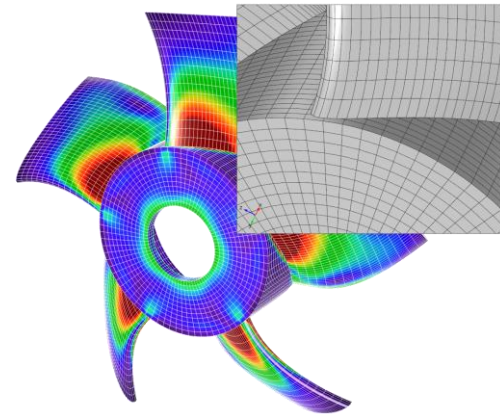
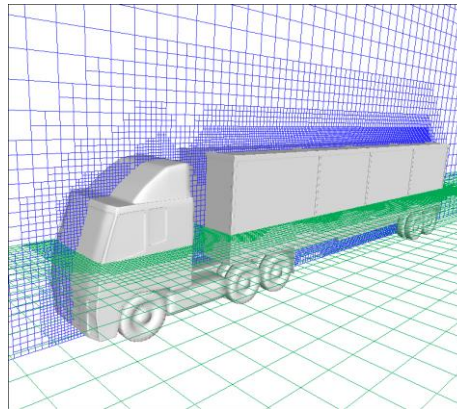
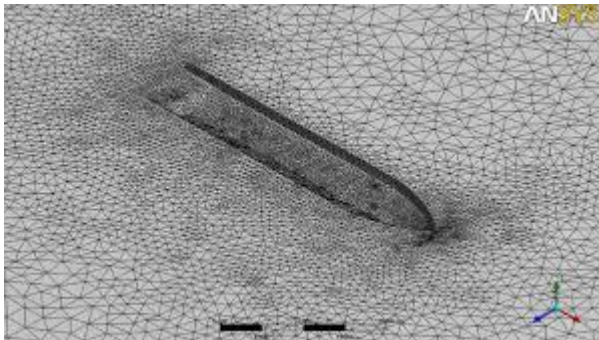
Truncando em $n=1$

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x$$



Séries de Taylor

Balanços em elementos infinitesimais - Métodos computacionais.



$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x$$

A convergência depende do tamanho dos volumes.



Exemplo 13 – Solução

continuação

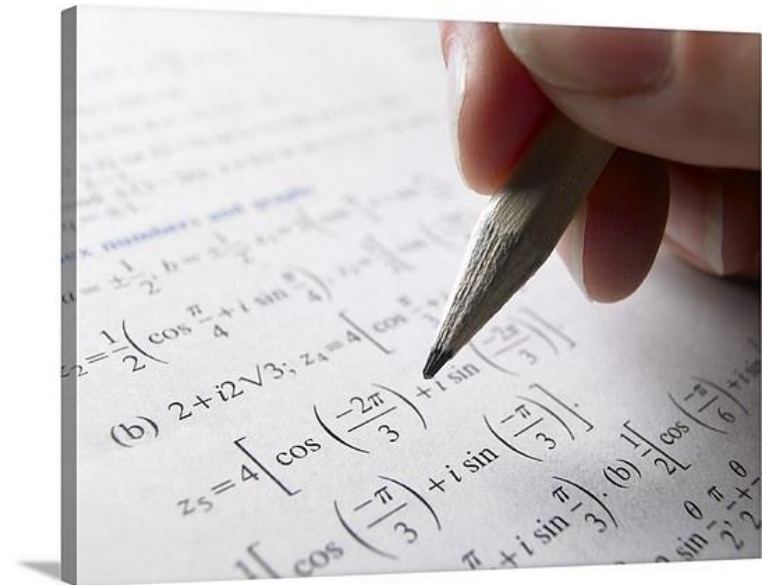
(b) Usando as séries de Maclaurin da tabela, obtemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$



Lista de exercícios

Lista 8.





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.