



Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Centro de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Equações Diferenciais Lineares de Alta Ordem

Prof. Diogo Lôndero da Silva



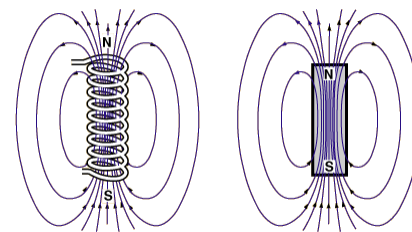
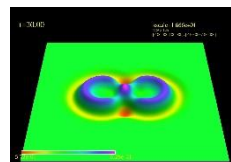
Sumário

1. Introdução
2. Equações lineares homogêneas de ordem n com coeficientes constantes;
3. Equações lineares não homogêneas de ordem n com coeficientes constantes;
 - a. Método dos coeficientes indeterminados;



Introdução

1. Os métodos desenvolvidos para equações de segunda ordem lineares podem ser estendidos para ED lineares de terceira e n -ésima ordem;
2. A proposta desta aula é apresentar esta generalização.





Equações lineares de ordem n

Introdução

Uma equação diferencial ordinária de ordem n têm a forma:

$$P_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t). \quad 1$$

Assume-se que as funções $P_0, P_1, \dots, P_n$ e G são contínuas e reais em um intervalo $I: \alpha < t < \beta$ e que P_0 não é nulo neste intervalo. Dividindo a Eq. 1 por P_0 , obtém-se:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t). \quad 2$$



Equações lineares de ordem n

Introdução

Como a Eq. 2 apresenta uma derivada de n -ésima ordem, a função que representa a sua solução **terá n constantes**.

Portanto, para obter a solução particular **serão necessárias n condições iniciais**.

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

3

Onde t_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I e $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ qualquer conjunto de constantes reais. O seguinte teorema garante que, **dadas as condições iniciais, 3 o problema possui apenas uma solução**.



Equações lineares de ordem n

Introdução

Teorema 1

Se as funções $p_1, p_2, \dots, p_n$ e g forem contínuas em um intervalo aberto I , então existirá apenas uma solução $y = \phi(t)$ para a equação diferencial 2 que também atende as condições iniciais 3. Esta solução existe dentro do intervalo I .



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n, homogêneas

Uma equação diferencial ordinária de ordem n **homogênea** apresenta $g(t)=0$, de forma que a Eq. 2 assume a forma:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0. \quad 4$$

Se $y_1, y_2, \dots, y_n$ forem soluções da Eq. 4, então a combinação linear

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad 5$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n$, são constantes arbitrárias também será solução da Eq. 4.

Quando $y_1, y_2, \dots, y_n$ forem **linearmente independentes**, a Eq. 5 é a solução geral da Eq. 4.



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n, homogêneas

Para verificar se $y_1, y_2, \dots, y_n$ são **linearmente independentes**, emprega-se o Wronskiano que é definido por:

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

6

Se $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, então $y_1, y_2, \dots, y_n$ **são linearmente independentes**.



Equações lineares de ordem n

Equações lineares de ordem n e homogêneas

Esta característica das soluções $y_1, y_2, \dots, y_n$ permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2

Se as funções $p_1, p_2, \dots, p_n$ e g forem contínuas em um intervalo aberto I , e as funções $y_1, y_2, \dots, y_n$ forem soluções da Eq. 4, e $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ para ao menos um ponto em I , então todas as soluções da Eq. 4 podem ser expressas como combinações lineares de $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Este teorema confirma que se $y_1, y_2, \dots, y_n$ forem **linearmente independentes**, a Eq. 5 é a **solução geral** da Eq. 4.

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0. \quad \boxed{4}$$

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \dots + c_ny_n(t), \quad \boxed{5}$$



Equações lineares de ordem n , homogêneas com coeficientes constantes



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

Considere a seguinte EDO linear homogênea:

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad 7$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são constantes reais. Através do nosso conhecimento de EDOs lineares de segunda ordem é natural antecipar que $y = e^{rt}$ é solução da Eq. 7.

Assim, substituindo esta solução na Eq. 7, obtém-se:

$$L[e^{rt}] = e^{rt} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) = e^{rt} Z(r) \quad 8$$

Como e^{rt} nunca é zero a solução é obtida quando $Z(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$ for nula. O polinômio $Z(r)$ é denominado **equação característica** da Eq. 7.



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

Haverão três casos: I) Raízes reais e distintas; II) Raízes repetidas, III) Raízes complexas;

I) Raízes reais e distintas

Se as raízes da equação característica forem reais e distintas a solução geral assume a forma:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t}.$$

9

Exemplo: Encontre a solução de

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0.$$

Que atenda as seguintes condições iniciais

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = -1$$



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

Raízes reais e distintas

Assumindo solução $y = e^{rt}$ obtém-se a seguinte equação característica

$$r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0.$$

Cujas raízes são 1, -1, 2 e -3. Logo a solução geral é:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}.$$

Empregando as condições iniciais dadas obtém-se:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1,$$

$$c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 = 0,$$

$$c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 = -2,$$

$$c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 = -1.$$

Resolvendo este sistema, obtém-se: $c_1 = \frac{11}{8}, \quad c_2 = \frac{5}{12}, \quad c_3 = -\frac{2}{3}, \quad c_4 = -\frac{1}{8}.$



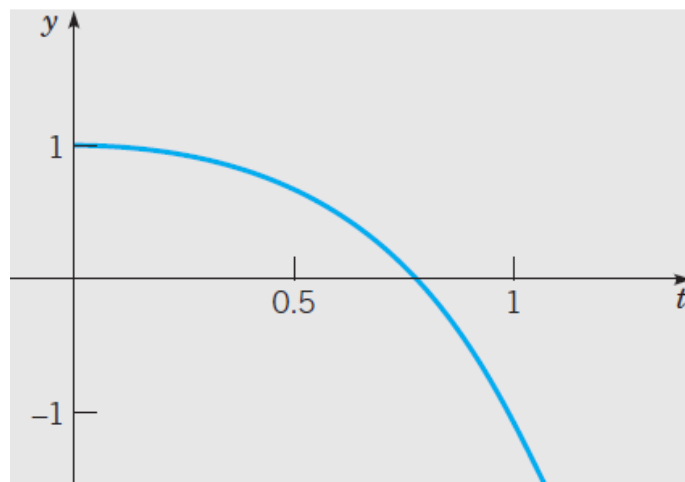
Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

I) Raízes reais e distintas

Portanto, a solução é: $y = \frac{11}{8}e^t + \frac{5}{12}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-3t}.$

Cujo gráfico é apresentado na figura abaixo





Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

II) Raízes repetidas

Quando a equação característica apresentar raízes reais repetidas, multiplica-se a solução por t sucessivamente, para obter novas soluções linearmente independentes do tipo:

$$e^{r_1 t}, \quad t e^{r_1 t}, \quad t^2 e^{r_1 t}, \quad \dots, \quad t^{s-1} e^{r_1 t}$$

O mesmo procedimento deve ser empregado para raízes complexas repetidas, resultando em soluções linearmente independentes do tipo:

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad e^{\lambda t} \sin \mu t, \quad t e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad t e^{\lambda t} \sin \mu t, \\ \dots, \quad t^{s-1} e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad t^{s-1} e^{\lambda t} \sin \mu t. \end{aligned}$$



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

II) Raízes repetidas

Exemplo: Encontre a solução geral de $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Neste caso a equação característica é

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Cujas raízes são: $i, i, -i, -i$, que originam a seguinte solução geral.

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t.$$



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

III) Raízes complexas

Se a equação característica possui raízes complexas elas serão pares conjugados da forma $\lambda \pm i\mu$. Neste caso, para cada par conjugado, a solução adquire a forma $\exp(\lambda + i\mu)$ e $\exp(\lambda - i\mu)$ que é equivalente a:

$$y(t) = e^{\lambda t} (c_2 \cos(\mu t) + c_3 \operatorname{sen}(\mu t))$$

Exemplo: Encontre a solução de $y^{(4)} - y = 0$.

Sujeita as condições iniciais

$$y(0) = 7/2, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 5/2, \quad y'''(0) = -2$$



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n homogêneas com coeficientes constantes

III) Raízes complexas

A equação característica é $r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$.

com raízes iguais a: 1, -1, -i, i que geram a solução geral:

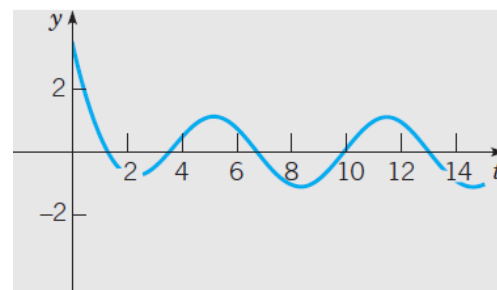
$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t.$$

Utilizando as condições iniciais e resolvendo o sistema linear resultante, obtém-se:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 1/2, \quad c_4 = -1;$$

Portanto, a solução da equação diferencial é:

$$y = 3e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t - \sin t.$$





Equações lineares de ordem n , não homogêneas.



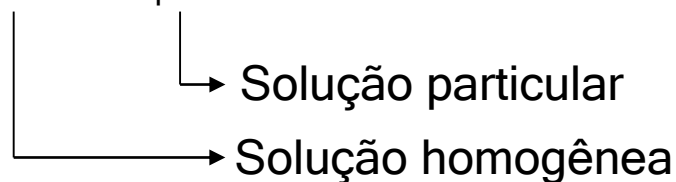
Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n não homogêneas

Seja a equação diferencial linear não homogênea

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(t)$$

Cuja solução é $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$.



A solução homogênea é obtida como demonstrado anteriormente enquanto a solução particular é obtida através dos métodos: (i) coeficientes indeterminados e (ii) variação de parâmetros.



Método dos coeficientes indeterminados



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n não homogêneas

A forma da solução particular $y_p(t)$ deve ser selecionada de acordo com a forma do termo $g(t)$ presente na EDO não homogênea, como mostra a tabela abaixo.

Term in $r(x)$	Choice for $y_p(x)$
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
kx^n ($n = 0, 1, \dots$)	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$	$\left. \begin{array}{l} k \sin \omega x \\ k e^{\alpha x} \cos \omega x \\ k e^{\alpha x} \sin \omega x \end{array} \right\} K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	
$k e^{\alpha x} \cos \omega x$	$\left. \begin{array}{l} k e^{\alpha x} \sin \omega x \end{array} \right\} e^{\alpha x} (K \cos \omega x + M \sin \omega x)$
$k e^{\alpha x} \sin \omega x$	

- **Regra básica:** Proponha um y_p com base na forma da função $r(x)$. Substitua esta função na E.D.O de modo a achar os coeficientes indeterminados.
- **Modificação:** Caso a função proposta for solução da homogênea multiplicar esta função por x . Caso essa também seja multiplicar novamente por x .
- **Soma:** Caso $r(x)$ seja uma soma, somar as soluções correspondentes



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n não homogêneas

Exemplo: Encontre a solução geral de:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t.$$

A equação característica é

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r - 1)^3,$$

Que gera a seguinte solução para a equação homogênea associada.

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t.$$

Para encontrar a solução particular, inicia-se propondo $y_p(t) = Ae^t$. Mas como e^t , te^t e t^2e^t já são soluções presentes na solução homogênea, multiplica-se a solução proposta por t^3 . Assim, $y_p(t) = t^3 Ae^t$.



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n não homogêneas

Para encontrar o valor de A, deriva-se $y_p(t)$ três vezes e substitui-se na equação diferencial obtendo-se:

$$6Ae^t = 4e^t.$$

Onde $A=2/3$

Assim a solução geral é

$$y = \underbrace{c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t}_{y_c} + \underbrace{\frac{2}{3} t^3 e^t}_{y_p}.$$



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n não homogêneas

Exemplo: Encontre a solução particular de

$$y''' - 4y' = t + 3 \cos t + e^{-2t}.$$

Resolvendo a equação homogênea, cuja equação característica é $r^3 - 4r = 0$ com raízes $r = 0$ e ± 2 . Portanto,

$$y_c(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}.$$

É possível escrever a solução particular como a soma das soluções particulares das equações diferenciais

$$y''' - 4y' = \overset{y_{1,p}}{\uparrow} t + \overset{y_{2,p}}{\uparrow} 3 \cos t + \overset{y_{3,p}}{\uparrow} e^{-2t}.$$

A nossa escolha inicial para $y_{1,p} = A_0 t + A_1$, mas como uma constante (c_1) já é solução da equação homogênea deve-se empregar $y_{1,p} = t(A_0 t + A_1)$



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n não homogêneas

Para a segunda equação escolhemos

$$Y_2(t) = B \cos t + C \sin t,$$

Note que neste caso não é necessário multiplicar por t , pois $B \cos t$ e $C \sin t$ não são soluções da equação homogênea.

Para a terceira equação, como e^{-2t} é solução da equação homogênea, assumimos:

$$Y_3(t) = Ete^{-2t}.$$

As constantes são determinadas derivando e substituindo as soluções $Y_1 + Y_2 + Y_3$ na equação diferencial original, obtendo-se: $A_0 = -\frac{1}{8}$, $A_1 = 0$, $B = 0$, $\tilde{C} = -\frac{3}{5}$, and $\tilde{E} = \frac{1}{8}$

Assim, a solução particular é:

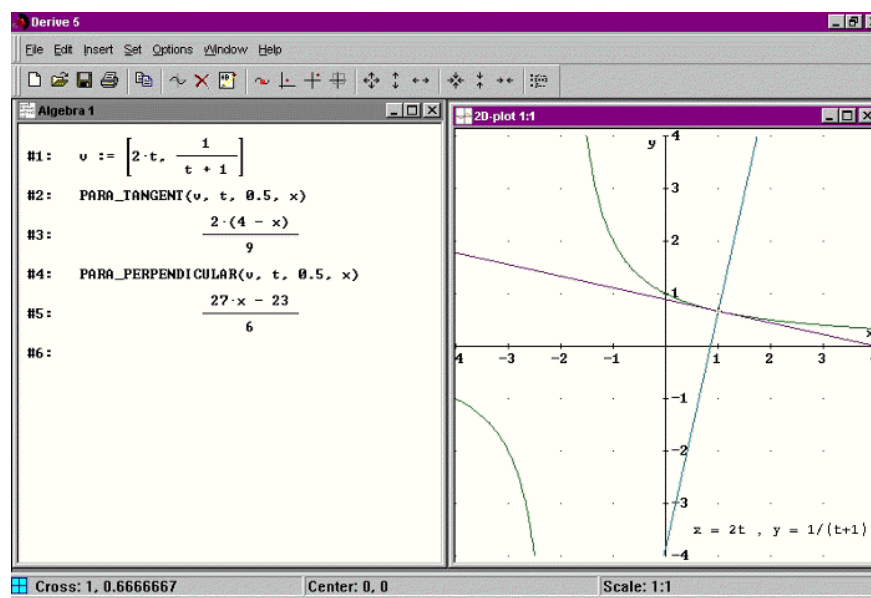
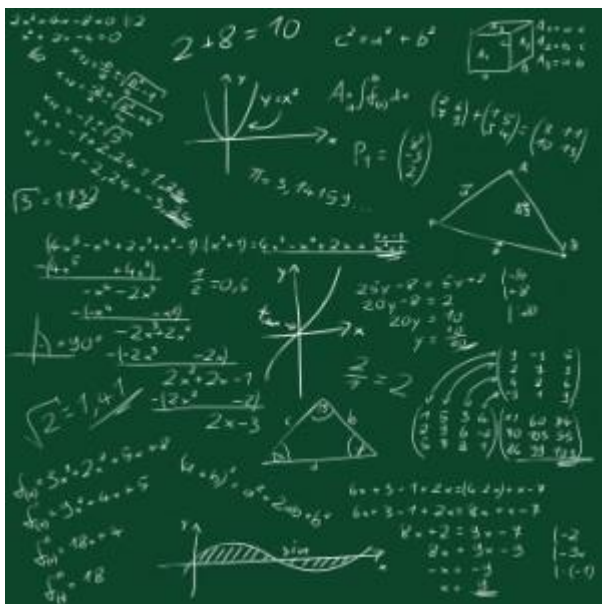
$$Y(t) = -\frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{5} \sin t + \frac{1}{8}te^{-2t}.$$



Equações lineares de ordem n

Equações lineares ordem n não homogêneas

Como você pode ter observado, a quantidade de trabalho algébrico é elevado para obter a solução de equações diferenciais de alta ordem. Este fato deve incentivar o estudante no domínio e utilização de sistemas de computação algébrica durante o trabalho de solução.

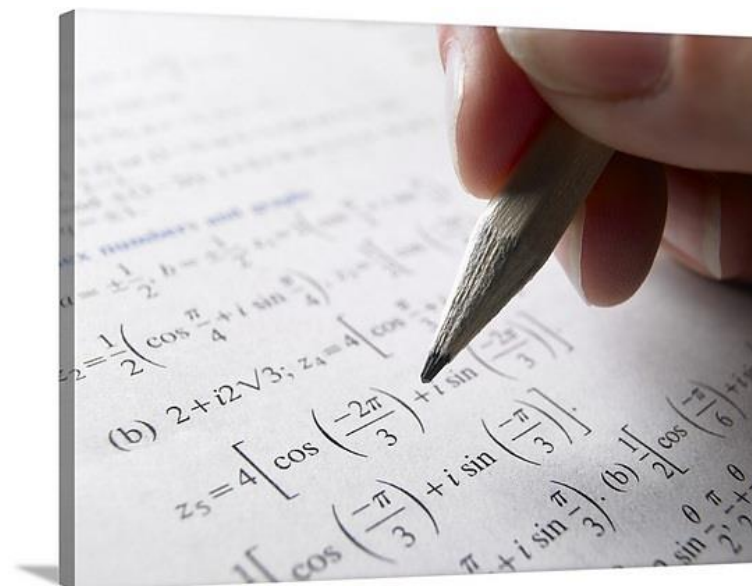




Lista de exercícios

Opcional

Exercícios Boyce e DiPrima oitava
Edição, CAP 4 (Equações Lineares
De Ordem Mais Alta)





Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; ÍÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.