UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

EMB5014 - Séries e Equações Diferenciais

Prof. Diogo Lôndero da Silva

Lista 12

Secção 7.6: Autovalores complexos

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, expresse a solução geral do sistema de equações dado como combinação de funções reais. Nos problemas de 1 a 6, desenhe, também, um campo de direções, esboce algumas trajetórias e descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Nos Problemas 9 e 10, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Nos Problemas 11 e 12:

(a) Encontre os autovalores do sistema dado.

(b) Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe a trajetória correspondente no plano x_1x_2.

(c) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe os gráficos de x_1 e x_2 em função de t.

(d) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe o gráfico correspondente no espaço tridimensional tx_1x_2.

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

25. Considere o circuito elétrico ilustrado na Fig. 7.6.5. Suponha que $R_1 = R_2 = 4$ ohms, $C = 1/2$ farad e $L = 8$ henrys.
(a) Mostre que esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}. \qquad \text{(i)}$$

onde I é a corrente passando no indutor e V é a queda de voltagem através do capacitor.
Sugestão: Veja o Problema 18 da Seção 7.1.
(b) Encontre a solução geral das Eqs. (i) como combinação de funções reais.
(c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2$ ampères e $V(0) = 3$ volts.
(d) Determine os valores-limite de $I(t)$ e $V(t)$ quando $t \to \infty$. Esses valores-limite dependem das condições iniciais?

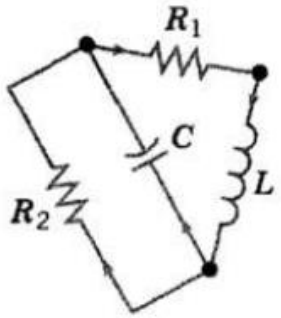

FIG. 7.6.6 O circuito do Problema 25.

30. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento são as Eqs. (22) no texto. Sejam $m_1 = 1$, $m_2 = 4/3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, e $k_3 = 4/3$.
(a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.
(b) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$.
(c) Escreva a solução geral do sistema.
(d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe os gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.
(e) Considere a condição inicial $y(0) = (2, 1, 0, 0)^T$. Calcule as constantes na solução geral no item (c). Qual o período do movimento nesse caso? Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4. Certifique-se de que você compreende como as trajetórias são percorridas durante um período completo.
(f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

Secção 7.8: Autovalores repetidos (optativo)

Nos problemas de 7 a 10, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Desenhe a trajetória da solução no plano x_1x_2 e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Secção 7.9: Sistemas lineares não homogêneos

Problemas

Nos problemas de 1 a 12, encontre a solução geral do sistema de equações dados.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}\,e^{-t} \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \qquad t > 0$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}, \qquad t > 0$

13. O circuito elétrico mostrado na Fig. 7.9.1 é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \qquad \text{(i)}$$

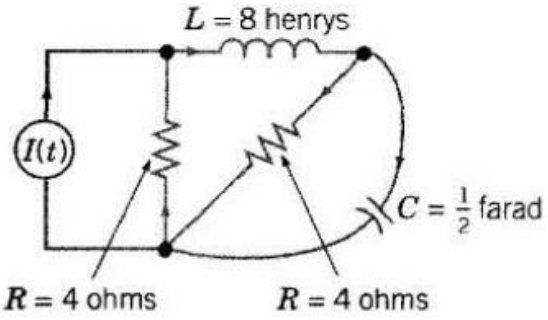

FIG. 7.9.1 O circuito do Problema 13.

onde x_1 é a corrente através do indutor, x_2 é a queda de voltagem através do capacitor e $I(t)$ é a corrente fornecida pela fonte externa.
(a) Determine uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema homogêneo correspondente à Eq. (i). Veja o Problema 25 da Seção 7.6.
(b) Se $I(t) = e^{-t/2}$, determine a solução do sistema (i) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Obs: Todos os exercícios foram extraídos [Boyce, W.E., DiPrima, R.C., Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno , 8ª ed.]

Atualizado em: 02/05/2016.
Professor Diogo Lôndero da Silva.