Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Joinville
Departamento de Engenharias da Mobilidade

Séries e Equações Diferenciais

Unidade 9

Séries infinitas

Prof. Diogo Lôndero da Silva

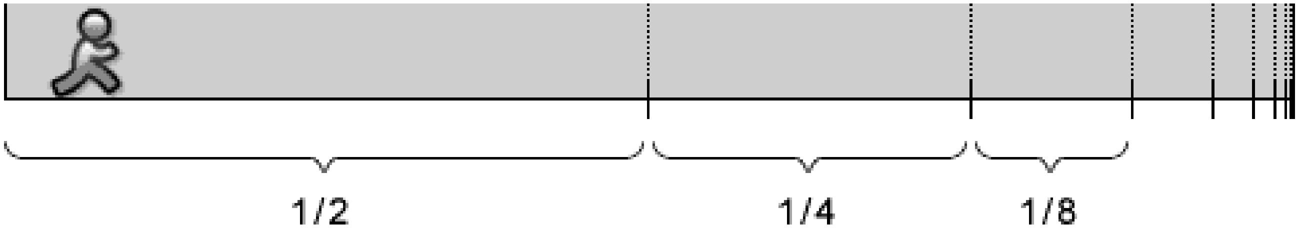
Sumário

1. Introdução
2. Séries infinitas;
    i. Teste da divergência
    ii. Teste da integral
    iii. Testes de comparação e comparação no limite
    iv. Teste de séries alternadas
    v. Testes da razão e da raiz
3. Estratégias para testes de séries

Paradoxo de Zeno

Será possível chegar na outra extremidade se a lógica abaixo tiver que ser respeitada?

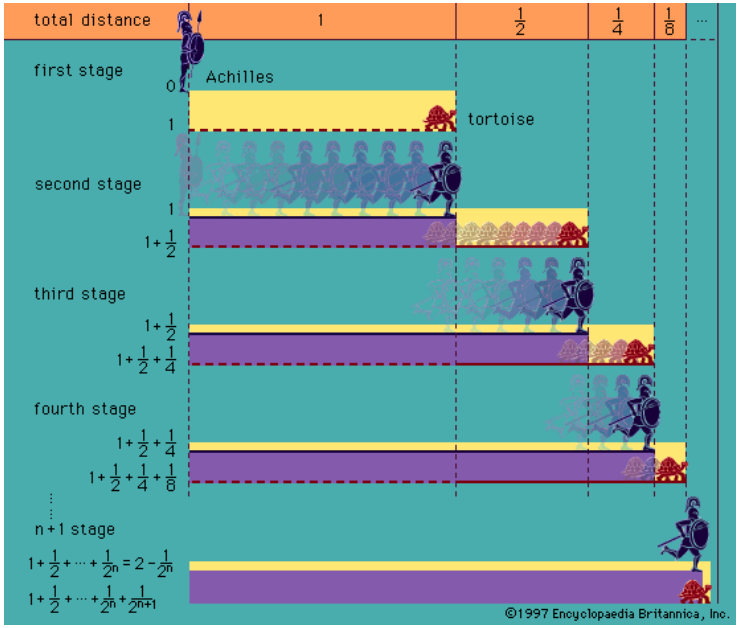
É possível sempre se aproximar mas nunca chegar ao destino final?

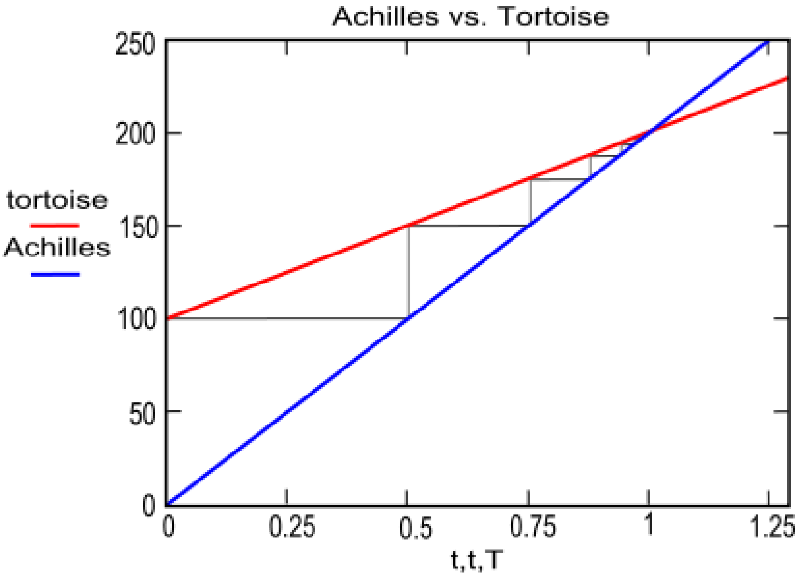


Introdução

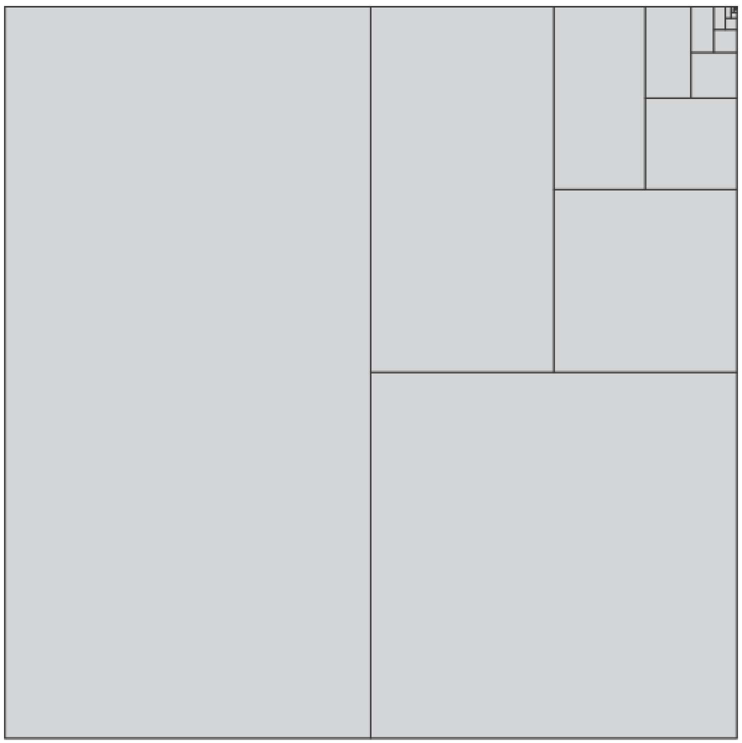
Aquiles x Tartaruga

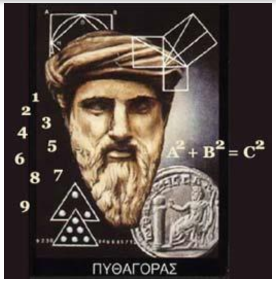
A tartaruga tem uma vantagem, mas desloca-se com a metade da velocidade de Aquiles. Será que ele será capaz de ultrapassá-la?

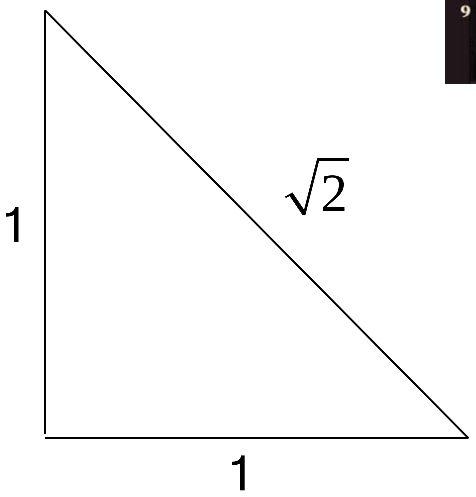




Introdução







Conclui-se que faz sentido somar infinitos termos em busca de um resultado!

Introdução

Séries

(Stewart, J., Vol. 2)

O que queremos dizer quando expressamos um número como um decimal infinito? Por exemplo, o que significa escrever

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 . . .

A convenção por trás de nossa notação decimal é que qualquer número pode ser escrito como uma soma infinita. Aqui, isso significa que

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

onde os três pontos $(\cdots)$ indicam que a soma continua para sempre, e quanto mais termos adicionamos, mais nos aproximaremos do valor real de π.

Em geral, se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \boxed{1}$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n$$

Séries

Seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque, se começarmos adicionando os termos, obteremos as somas cumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . e depois do n-ésimo termo, obteremos $n(n + 1)/2$, que se torna muito grande à medida que n aumenta.

Contudo, se começarmos a somar os termos da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

obtemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. A tabela mostra que, quando adicionamos mais e mais termos, essas *somas parciais* se tornam cada vez mais próximas de 1.

n	Soma dos n primeiros termos
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,99999905
25	0,99999997

6

De fato, somando um número suficiente de termos da série, podemos fazer as somas parciais se tornarem tão próximas quanto quisermos de 1. Assim, parece razoável dizer que a soma dessa série infinita é 1 e escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Usamos uma ideia parecida para determinar se uma série geral $\boxed{1}$ tem uma soma ou não.

Consideramos as **somas parciais**

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

e, em geral,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência $\{s_n\}$, que pode ou não ter um limite.

Séries

Se $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo anterior, o chamamos soma da série infinita Σa_n.

$\boxed{2}$ **Definição** Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, deixe s_n denote por sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\Sigma\, a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo, quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Exemplo 2

Um exemplo importante de uma série infinita é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada termo é obtido a partir do anterior, multiplicando-se pela **razão comum** *r*.

Se $r = 1$, então $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\,\infty$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe, a série geométrica diverge nesse caso.

Exemplo 2

Se $r \neq 1$, temos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Subtraindo essas equações, obtemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$\boxed{3} \qquad s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Exemplo 2

Se $-1 < r < 1$, sabemos que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r}$$

Então, quando $|r| < 1$, a série geométrica é convergente, e sua soma é $a/(1-r)$.

Se $r \leq -1$ ou $r > 1$, a sequência $\{r^n\}$ é divergente; assim, pela Equação 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe. Portanto, a série geométrica diverge naqueles casos.

Resumimos os resultados do Exemplo 2 como a seguir.

$\boxed{4}$ A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Se $|r| \geqslant 1$, a série geométrica é divergente.

Note que "a" é o primeiro termo da série geométrica.

Exemplo 8

Mostre que a **série harmônica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

SOLUÇÃO: Para essa série particular é conveniente considerar as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$ e mostrar que elas se tornam grandes.

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

Exemplo 8

$$s_8 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right)$$

$$> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2}$$

$$s_{16} = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right)$$

$$> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2}$$

Exemplo 8

Analogamente, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, e, em geral

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Isso mostra que $s_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim $\{s_n\}$ é divergente. Portanto, a série harmônica diverge.

6 Teorema Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira, em geral.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não podemos concluir que $\Sigma\, a_n$ é convergente.

Séries

7 **Teste de Divergência** Se $\lim_{n \to \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

O Teste para Divergência vem do Teorema 6, porque, se a série não for divergente, ela é convergente, e assim, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

8 **Teorema** Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries $\sum ca_n$ (onde c é uma constante), $\sum (a_n + b_n)$ e $\sum (a_n - b_n)$ e

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

O Teste da Integral

O teste da integral e estimativa de somas

Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série. Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série $\Sigma\ 1/[n(n+1)]$ porque em cada um desses casos pudemos encontrar uma fórmula simples para a n-ésima soma parcial s_n . Mas geralmente não é fácil descobrir tal fórmula.

O teste da integral e estimativa de somas

Começamos investigando as séries cujos termos são os recíprocos dos quadrados de inteiros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Não existe uma fórmula simples para a soma s_n dos primeiros n termos, mas a tabela de valores aproximados gerada por computador dada na margem sugere que as somas parciais estão se aproximando de um número próximo de 1,64 quando $n \to \infty$ e, assim, parece que a série é convergente.

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1,4636
10	1,5498
50	1,6251
100	1,6350
500	1,6429
1000	1,6439
5000	1,6447

O teste da integral e estimativa de somas

Podemos confirmar essa impressão com um argumento geométrico. A Figura 1 mostra a curva $y = 1/x^2$ e retângulos colocados abaixo dela.

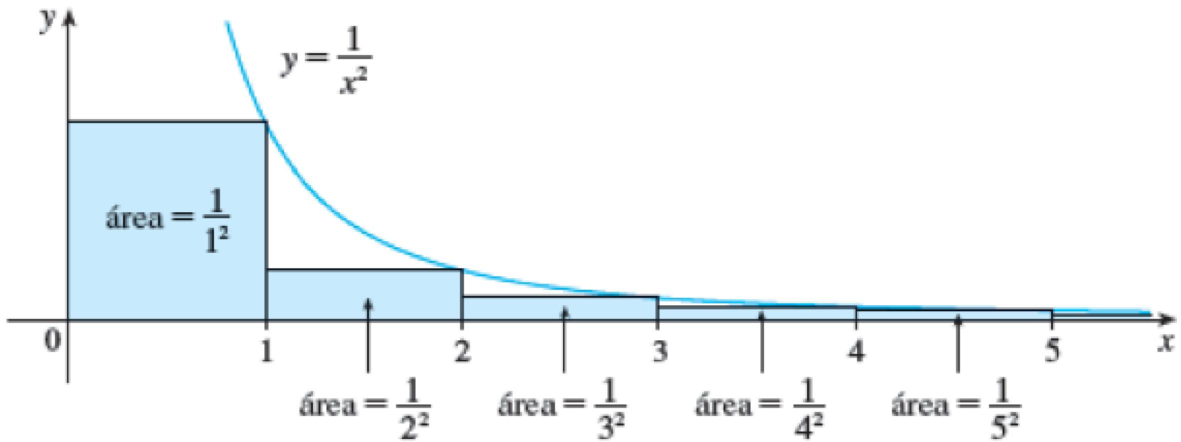


Figura 1

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1; a altura é igual ao valor da função $y = 1/x^2$ na extremidade direita do intervalo.

O teste da integral e estimativa de somas

Dessa forma, a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Se excluirmos o primeiro retângulo, a área total dos retângulos remanescentes será menor que a área sob a curva $y = 1/x^2$ para $x \geq 1$, que é o valor da integral $\int_1^\infty (1/x^2)\, dx$. Essa integral imprópria é convergente e tem valor 1. Assim, a figura mostra que todas as somas parciais são menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 2$$

Então, as somas parciais são limitadas.Também sabemos que as somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Portanto, as somas parciais convergem (pelo Teorema da Sequência Monótona) e, dessa maneira, a série é convergente. A soma da série (o limite das somas parciais) é também menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

Agora vamos olhar para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

A tabela de valores de s_n sugere que as somas parciais não estão se aproximando de um número; assim, suspeitamos que essa série possa ser divergente.

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3,2317
10	5,0210
50	12,7524
100	18,5896
500	43,2834
1000	61,8010
5000	139,9681

O teste da integral e estimativa de somas

Novamente usamos um desenho para a confirmação. A Figura 2 mostra a curva $y = 1/\sqrt{x}$, porém dessa vez utilizamos retângulos cujos topos estão *acima*da curva.

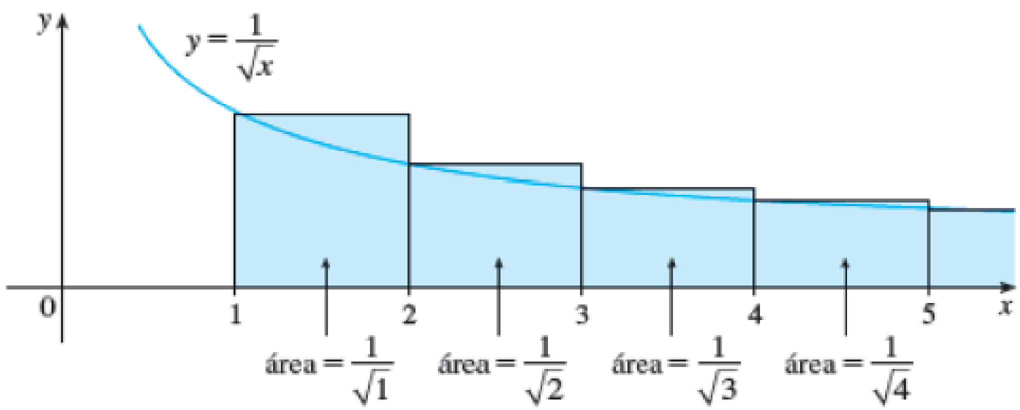


Figura 2

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1. A altura é igual ao valor da função $y = 1/\sqrt{x}$ na extremidade *esquerda* do intervalo.

O teste da integral e estimativa de somas

Dessa forma, a soma de todas as áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essa área total é maior que a área sob a curva $y = 1/\sqrt{x}$, para $x \geq 1$, que é igual à integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Mas sabemos, que essa integral imprópria é divergente. Em outras palavras, a área sob a curva é infinita. Assim a soma da série deve ser infinita, isto é, a série é divergente.

O teste da integral e estimativa de somas

O mesmo tipo de argumentação geométrica que usamos para essas duas séries pode ser usado para demonstrar o seguinte teste.

O Teste da Integral Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

A série é chamada **série *p***.

$\boxed{1}$ A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exemplo 3

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma série *p* com *p* = 3 > 1.

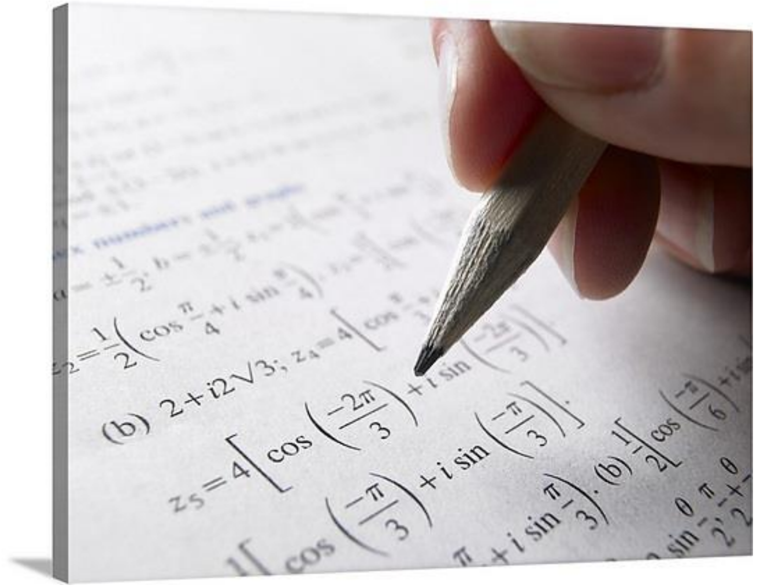
(b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

é divergente porque ela é uma série *p* com $p = \frac{1}{3} < 1$.

Lista 7

.



Os Testes de Comparação

Os testes de comparação

Nos testes de comparação, a ideia é comparar uma série dada com uma que sabemos ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos remete à série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é, portanto, convergente.

Como a série $\boxed{1}$ é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Na verdade, é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

Os testes de comparação

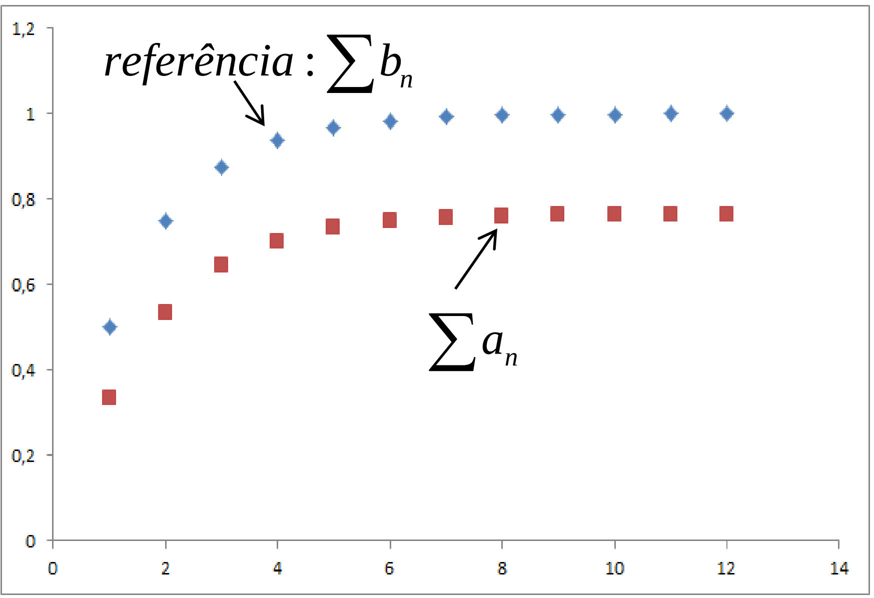
mostra que nossa série dada $\boxed{1}$ tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica:

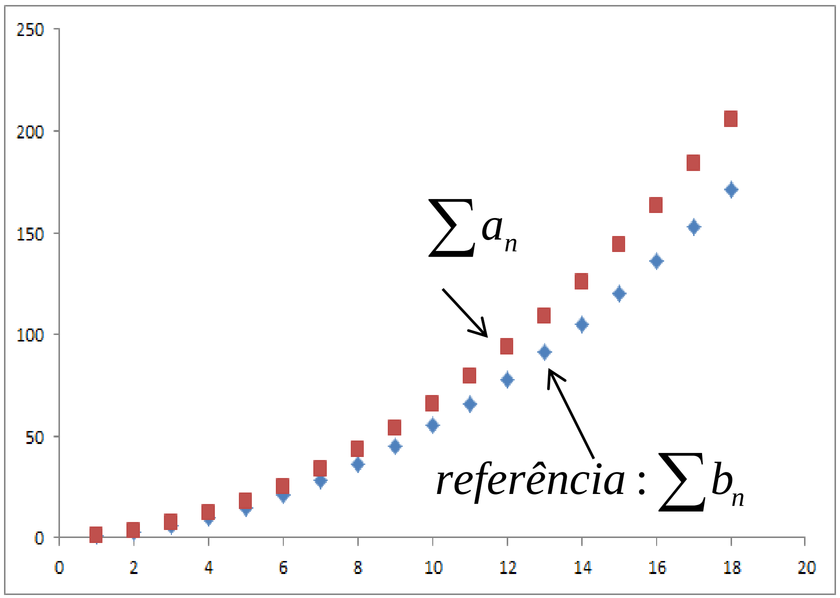
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Os testes de comparação

$\sum b_n$ referência convergente

$\sum b_n$ referência divergente





$\sum a_n$ Converge!

$\sum a_n$ Diverge!

Os testes de comparação

Argumentação semelhante pode ser usada para demonstrar o seguinte teste, que se aplica apenas a séries cujos termos são positivos. A primeira parte diz que, se tivermos uma série cujos termos são *menores* que aqueles de uma série que sabemos ser *convergente*, então nossa série também será convergente. A segunda parte diz que, se começarmos com uma série cujos termos são *maiores* que aqueles de uma série que sabemos ser *divergente*, ela também será divergente.

O Teste de Comparação Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

5

Os testes de comparação

Demonstração

(i) Seja $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ onde $a_i \le b_i$

Como ambas as séries têm termos positivos, as sequencias $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são **crescentes** ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n$). Também $t_n \to t$, portanto, $t_n \le t$ para todo n.

Como $a_i \le b_i$, temos $s_n \le t_n$ para todo n. Isso significa que $\{s_n\}$ é crescente e **limitada superiormente** e, portanto, **converge** pelo teorema da sequência monótona.

Por conseguinte, Σa_n converge.

(ii) Se Σb_n for divergente, então $t_n \to \infty$ (porque $\{t_n\}$ é crescente). Mas $a_i \ge b_i$, assim, $s_n \ge t_n$. Portanto, Σa_n diverge.

Os testes de comparação

Ao usarmos o Teste de Comparação, devemos, é claro, ter algumas séries conhecidas $\Sigma\, b_n$ para o propósito de comparação. Na maior parte do tempo usamos uma destas séries:

- A série p [$\Sigma\, 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$];
- Uma série geométrica [$\Sigma\, ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$].

Os testes de comparação

Exemplo 1

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO: Para um n grande, o termo dominante no denominador é $2n^2$, assim, comparamos a série dada com a série $\Sigma\ 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. (Na notação do Teste de Comparação, a_n é o lado esquerdo e b_n é o lado direito.)

Os testes de comparação

Exemplo 1

Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante vezes uma série *p* com $p = 2 > 1$. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

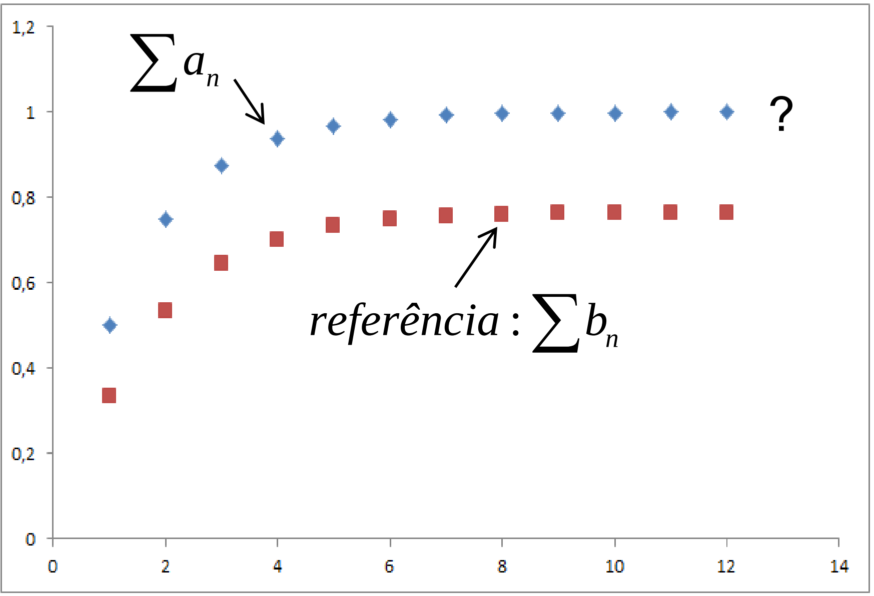
é convergente pela parte (i) do Teste de Comparação.

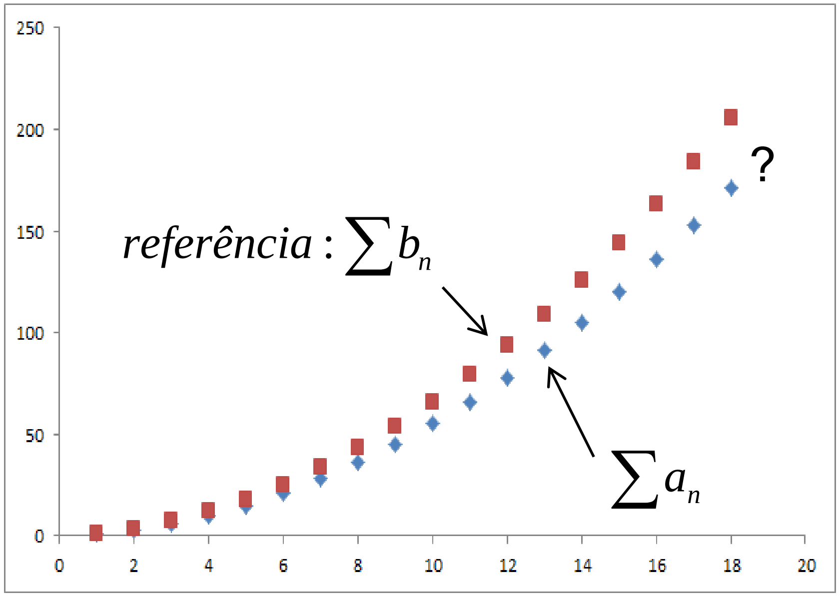
Os testes de comparação

OBSERVAÇÃO 1 Embora a condição $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ no Teste de Comparação seja dada para todo n, precisamos verificar apenas que ela vale para $n \geq N$, onde N é algum inteiro fixo, porque a convergência de uma série não é afetada por um número finito de termos.

OBSERVAÇÃO 2 Os termos da série sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o Teste de Comparação não se aplica.

Observação 2





$\sum a_n$ Inconclusivo!

$\sum a_n$ Inconclusivo!

Os testes de comparação

Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

é inútil para ser usada com o Teste de Comparação, porque $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente e $a_n > b_n$.

Os testes de comparação

Mesmo assim, temos a impressão de que $\Sigma\ 1/(2^n - 1)$ deve ser convergente, pois ela é muito parecida com a série geométrica convergente $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Em tais casos, o seguinte teste pode ser usado.

O Teste de Comparação no Limite Suponha que Σa_n e Σb_n sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Os testes de comparação

Demonstração

Sejam m e M números positivos tais que $m < c < M$. Uma vez que a_n/b_n está próximo de c para um n grande, existe um inteiro N tal que

$$m < a_n/b_n < M \qquad \text{onde } n > N$$

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{quando } n > N$$

E assim,

Se Σb_n convergir, então ΣMb_n também converge. Então Σa_n converge pela parte (i) do teste de comparação.

Se Σb_n divergir, então Σmb_n também diverge, e a parte (ii) do teste de comparação mostra que Σa_n diverge.

Os testes de comparação

Exemplo 3

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ quanto a convergência ou divergência.

SOLUÇÃO: Usamos o Teste de Comparação no Limite com

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

e obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Exemplo 3

Como esse limite existe e $\Sigma\ 1/2^n$ é uma série geométrica convergente, a série dada converge pelo Teste de Comparação no Limite.

Séries Alternadas

Séries alternadas

Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas*, cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão alguns exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$$

Séries alternadas

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$.)

O teste a seguir diz que, se os termos de uma série alternada decrescem para 0 em valor absoluto, então a série converge.

Séries alternadas

Teste de Série Alternada Se a série alternada

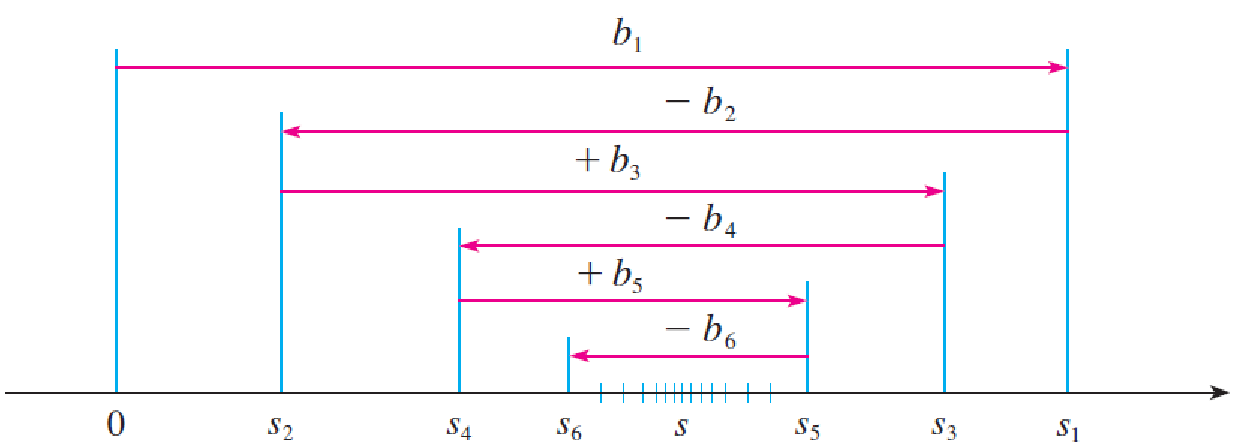
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.



Demonstração

Considerando as **somas parciais pares**, observa-se que:

$s_2 = b_1 - b_2 \geq 0$ uma vez que $b_2 \leq b_1$

$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geq s_2$ uma vez que $b_4 \leq b_3$

Em geral $s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geq s_{2n-2}$ uma vez que $b_{2n} \leq b_{2n-1}$

Logo $0 \leq s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq \ldots$ (é crescente)

Mas podem escrever

$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \ldots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$ (b_1 é o L.S.)

Cada termo entre parênteses é positivo, portanto $s_{2n} \leq b_1$ para todo n. Dessa forma, a sequência $\{s_{2n}\}$ de somas parciais pares é crescente e limitada superiormente, sendo assim convergente. Este limite será chamado de s, isto é:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Demonstração

Agora considerando o limite das **somas parciais ímpares**, observa-se que:

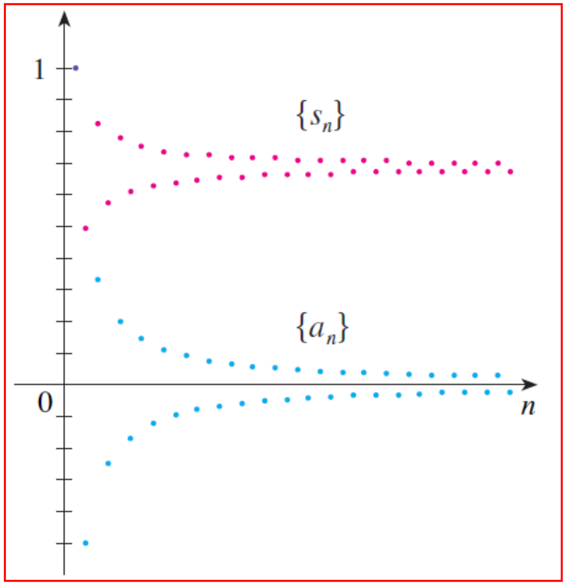
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(s_{2n} + b_{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1}$$

$$= s + 0 = s$$ condição (ii) do teste

Como as somas parciais pares e ímpares convergem para s, temos que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$



Exemplo

A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

(ii) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

logo, a série é convergente pelo Teste da Série Alternada.

Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

Convergência absoluta

Dada qualquer série $\Sigma\, a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

1 Definição Uma série $\Sigma\, a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ for convergente.

Observe que, se $\Sigma\, a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e, assim, a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

Exemplo 1

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma série *p* convergente ($p = 2$).

Exemplo 2

Sabemos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente, mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que é a série harmônica (série *p* com *p* = 1) e é, portanto, divergente.

Convergência absoluta

2 **Definição** Uma série $\sum a_n$ é chamada **condicionalmente convergente** se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

O Exemplo 2 mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente. Então, é possível uma série ser convergente, porém não absolutamente convergente. Contudo, o próximo teorema mostra que a convergência absoluta implica convergência.

3 **Teorema** Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Convergência absoluta

Demonstração

Observe que a desigualdade

$$0 \leq a_n + |\, a_n \,| \leq 2|\, a_n \,|$$

é verdadeira porque a_n pode ser um número positivo ou negativo. Se Σa_n for absolutamente convergente, então $\Sigma\ |a_n|$ é convergente, assim $\Sigma 2|\ a_n\ |$ é convergente. Portanto, pelo teste de comparação, $\Sigma(a_n + |a_n|)$ é convergente. Então,

$$\Sigma\, a_n = \Sigma(a_n + |\, a_n \,|) - \Sigma\, |\, a_n \,|$$

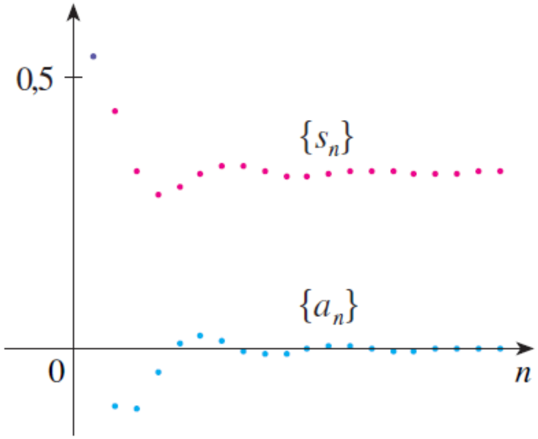
é a diferença de duas séries convergentes e é, portanto, convergente.

Exemplo 3

Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.



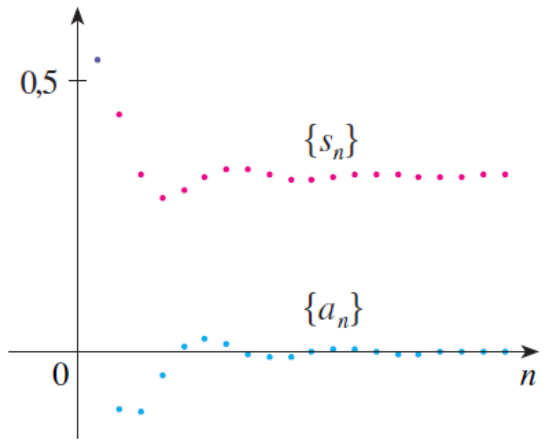
SOLUÇÃO: Essa série tem termos positivos e negativos, mas não é alternada. (O primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais trocam irregularmente.)

Exemplo 3 – *Solução*

continua

Podemos aplicar o teste da comparação com a série de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$



Uma vez que $|\cos n| \leq 1$ para todo n, temos

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\Sigma\ 1/n^2$ é convergente (série p com $p = 2$) e, assim, $\Sigma\ |\cos n|/n^2$ é convergente pelo Teste da Comparação. Então a série dada $\Sigma\ (\cos n)/n^2$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente pelo Teorema 3.

Testes da Razão

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

O Teste da Razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, , o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\Sigma\, a_n$.

Teste útil para séries que contêm exponenciais ou fatoriais.

Demonstração

(i) A ideia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como L < 1, podemos escolher um número r tal que L < r < 1. Uma vez que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{e} \qquad L < r$$

A razão $|a_{n+1} / a_n|$ será menor que r a partir de um valor N, ou seja

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{sempre que } n \geq N$$

Ou, de maneira equivalente, $|a_{n+1}| < |a_n|\, r$ sempre que $n \geq N$ [1]

Testes da Razão

Demonstração

Colocando n sucessivamente igual a N, N+1, N+2, ... em [1], obtemos

$$|a_{N+1}| < |a_N|\, r$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|\, r < |a_N|\, r^2$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|\, r < |a_N|\, r^3$$

E em geral

$$|a_{N+k}| < |a_N|\, r^k \qquad \text{para todo } k \geq 1 \qquad [2]$$

Agora, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + \ldots$

É convergente porque é uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim, a desigualdade [2], junto com o teste da comparação, mostra que a série

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots$ também é convergente.

Segue que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstração

(ii) Se $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ ou $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, então a razão $|a_{n+1}/a_n|$ será maior que 1 a partir de um valor de N, ou seja

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \text{sempre que } n \geq N$$

Isso significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ quando $n \geq N$, e assim

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Portanto, Σa_n diverge pelo teste da divergência.

OBSERVAÇÃO A parte (iii) do Teste da Razão diz que, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente $\Sigma\ 1/n^2$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Testes da Razão

enquanto para a série divergente $\Sigma\ 1/n$ obtemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \longrightarrow 1 \qquad \text{quando } n \longrightarrow \infty$$

Portanto, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, a série $\Sigma\ a_n$ pode convergir ou divergir. Nesse caso, o Teste da Razão falha e devemos usar outro teste.

Exemplo 5

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUÇÃO: Como os termos $a_n = n^n/n!$ são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Uma vez que $e > 1$, a série dada é divergente pelo Teste da Razão.

Testes da Raiz

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando n-ésimas potências ocorrem.

O Teste da Raiz

(i) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então, a parte (iii) do Teste da Raiz diz que o teste não dá informação. A série $\Sigma\, a_n$ pode convergir ou divergir. (Se L = 1 no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque L será novamente 1. E se L = 1 no Teste da Raiz, não tente o Teste da Razão, pois ele também falhará.)

14

Exemplo 6

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$.

SOLUÇÃO:

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz.

Estratégia para Testes de Séries

Estratégias para testes de séries

Agora temos diversas maneiras de testar a convergência ou divergência de uma série; o problema é decidir qual teste usar em qual série. Nesse aspecto, testar séries é similar a integrar funções. Mais uma vez, não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste aplicar em cada série, mas você pode achar os conselhos a seguir proveitosos.

Não é uma boa estratégia aplicar uma lista de testes em uma ordem específica até que um deles finalmente funcione. Isso seria uma perda de tempo e esforço. Em vez disso, como na integração, a principal estratégia é classificar a série de acordo com sua *forma*.

Estratégias para testes de séries

1. Se a série for da forma $\Sigma\ 1/n^p$, ela é uma série p que sabemos ser convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

2. Se a série tiver a forma $\Sigma\ ar^{n-1}$ ou $\Sigma\ ar^n$, ela é uma série geométrica, que converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Algumas manipulações algébricas podem ser necessárias para deixar a série para dessa forma.

Estratégias para testes de séries

3. Se a série tiver uma forma similar a uma série *p* ou a uma série geométrica, então um dos testes de comparação deve ser considerado. Em particular, se a_n for uma função racional ou uma função algébrica de n (envolvendo raízes de polinômios), então a série deve ser comparada com uma série *p*. Os testes de comparação se aplicam apenas a séries com termos positivos, mas, se Σa_n tiver alguns termos negativos, então poderemos aplicar o Teste da Comparação em $\Sigma\,|a_n|$ e testar a convergência absoluta.

4. Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, o Teste para Divergência deve ser usado.

5. Se a série for da forma $\Sigma(-1)^{n-1}b_n$ ou $\Sigma(-1)^n b_n$, então o Teste da Série Alternada é uma possibilidade óbvia.

6. Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à n-ésima potência) são com frequência testadas convenientemente usando-se o Teste da Razão. Tenha em mente que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ quando $n \to \infty$ para todas as séries p e, portanto, todas as funções racionais ou algébricas de n. Assim, o Teste da Razão não deve ser usado para tais séries.

7. Se a_n for da forma $(b_n)^n$, então o Teste de Raiz pode ser útil.

Estratégias para testes de séries

8. Se $a_n = f(n)$, onde $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é facilmente calculada, então o Teste da Integral é eficaz (satisfeitas as hipóteses para este teste).

Nos próximos exemplos não faremos todos os cálculos, mas simplesmente indicaremos quais testes devem ser usados.

Exemplo 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$$

Como $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ quando $n \to \infty$, devemos usar o Teste para Divergência.

Exemplo 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{3n^3 + 4n^2 + 2}$$

Como a_n é uma função algébrica de n, comparamos a série dada com uma série p. A série de comparação para o Teste de Comparação no Limite é $\sum b_n$, onde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

Exemplo 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 + 1}$$

Como a série é alternada, usamos o Teste da Série Alternada.

Exemplo 5

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

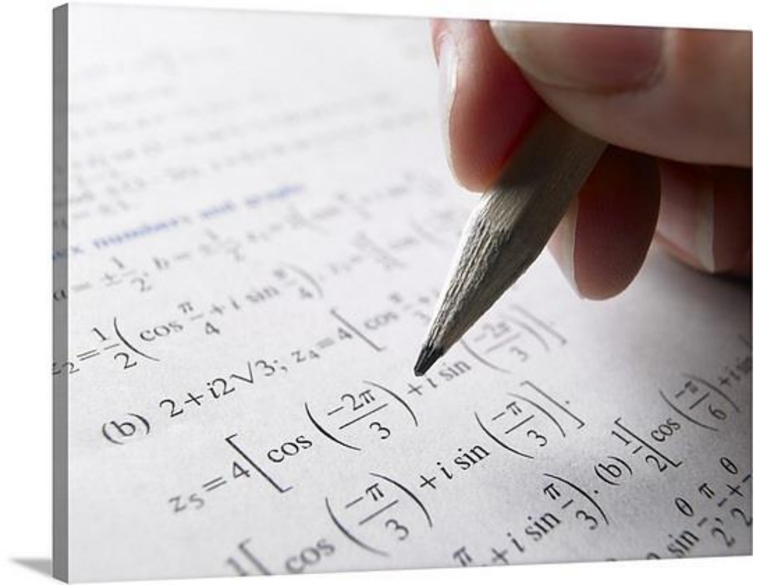
Como a série envolve $k!$, usamos o Teste da Razão.

Exemplo 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 3^n}$$

Como a série está intimamente relacionada à série geométrica $\sum 1/3^n$, usamos o Teste da Comparação.

Lista 8



Referências bibliográficas

Básica:

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C; IÓRIO, Valéria de Magalhães. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 978-85-216-1756-3.
- KREYSZIG, Erwin. Matemática superior para engenharia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. 1 v. ISBN 978-85-216-1644-3.
- NAGLE, R. KET; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. ISBN 978-85-814-3083-6. (ebook) .
- THOMAS, George Brinton et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. 2 v. ISBN 978-85-886-3936-2.

Complementar:

- STEWART, James. Calculo. São Paulo (SP): Cengage Learning, 2010. 2 v. ISBN 978-85-221-0661-5.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 1 v. ISBN 978-85-778-0400-9.
- ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. Matemática avançada para engenharia. Porto Alegre: Bookman, 2009. 3 v. ISBN 978-07-637-4591-2.